Pierwsza litera nazwiska

Egzamin 1 termin
4.02.16

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Znajdź przedział zbieżności szeregu potęgowego, i znajdź pochodną funkcji na tym przedziale, zdefiniowanej przez ten szereg:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n.$$

Rozwiązanie: Promień zbieżności znajdujemy łatwo:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1.$$

Dalej, widzimy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\right)',$$

czyli jest to szereg $\sum_1^\infty x^n$ zróżniczkowany wyraz za wyrazem. Z tw. o zbieżności jednostajnej szeregów potegowych wiemy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \left(\frac{1}{1-x}-1\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x|<1.$$

Mamy więc, dla $|x|<1$ a więc

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n\right)' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = (-2)\,\frac{1}{(1-x)^3}\,(-1) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej, i oblicz ją, jeżeli istnieje:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}}.$$

Rozwiązanie: Jedyna niewłaściwość tej całki to nieskończony przedział całkowania. Niech więc $M > 0$ będzie dowolne, i liczymy:

$$\begin{aligned}
\int_0^M \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}} &= \left\{ \begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ dt = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx \\ 2tdt = dx \end{array} \right\} \\
&= 2\int_0^{\sqrt{M}} e^{-t} \cdot t\,dt \\
&= 2\int_0^{\sqrt{M}} \Big(-e^{-t}\Big)' t\,dt \\
&= -2e^{-t}\,t\Big|_0^{\sqrt{M}} + 2\int_0^{\sqrt{M}} e^{-t}\,dt \\
&= -2e^{-\sqrt{M}} \cdot \sqrt{M} - 2e^{-t}\Big|_0^{\sqrt{M}} \\
&= -2e^{-\sqrt{M}}\sqrt{M} - 2e^{-\sqrt{M}} + 2 \ \xrightarrow{M\to\infty}\ 2,
\end{aligned}$$

gdyż

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\sqrt{M}}{e^{\sqrt{M}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = 0, \qquad \lim_{M\to\infty} e^{-\sqrt{M}} = \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź punkty przegięcia i przedziały wypukłości funkcji:

$$f(x) = x\, e^{-x^2}.$$

Rozwiązanie: Liczymy pochodne:

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2),$$
$$f''(x) = -2xe^{-x^2}(1-2x^2) + e^{-x^2}(-4x) = e^{-x^2}(-6x+4x^3).$$

Szukamy punktów, w których f'' zmienia znak. e^{-x^2} jest zawsze dodatnie, więc wystarczy zbadać znak $(4x^3-6x)$. Mamy:

$$(4x^3-6x) = 4x\Big(x^2 - \frac{3}{2}\Big) = 4x\bigg(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\bigg)\bigg(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\bigg).$$

Widzimy, że wyrażenie to zmienia znak w 3 punktach: 0 i $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. To są punkty przegięcia, a funkcja jest wypukła w przedziałach $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$ oraz $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$ a wklęsła w przedziałach $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ oraz $(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź pole powierzchni bocznej bryły obrotowej powstałej przez obrót wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\log x}{2}, \qquad x \in [1, e],$$

wokół osi OX.

Rozwiązanie: Obliczamy $f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$ i podstawiamy do wzoru:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_1^e f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\log x}{2}\right)\sqrt{1 + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\log x}{2}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx \\ &= 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^3}{8} + \frac{x}{8} - \frac{x\log x}{4} - \frac{\log x}{4x}\right) dx. \end{aligned}$$

Mamy:

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{x^3}{8}\, dx &= \frac{x^4}{32}\Big|_1^e = \frac{1}{32}(e^4 - 1), \\ \int_1^e \frac{x}{8}\, dx &= \frac{x^2}{16}\Big|_1^e = \frac{1}{16}(e^2 - 1), \\ \int_1^e \frac{x\log x}{4}\, dx &= \frac{1}{8}\int_1^e (x^2)' \log x\, dx = \frac{1}{8}\, x^2 \log x\Big|_1^e - \frac{1}{8}\int_1^e x\, dx \\ &= \frac{e^2}{8} - \frac{1}{16}\, x^2\Big|_1^e = \frac{e^2}{8} - \frac{e^2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{e^2+1}{16}, \\ \int_1^e \frac{\log x}{4x}\, dx &= \left\{ \begin{array}{c} t = \log x \\ dt = \frac{1}{x}\, dx \end{array} \right\} = \frac{1}{4}\int_0^1 t\, dt = \frac{1}{8} t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

W końcu:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\left(\frac{1}{32}\left(e^4 - 1\right) + \frac{1}{16}\left(e^2 - 1\right) - \frac{1}{16}\left(e^2 + 1\right) - \frac{1}{8}\right) \\ &= 2\pi\left(\frac{e^4}{32} - \frac{1}{32} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{\pi}{16}\left(e^4 - 9\right). \end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{e^x}{e^{3x}-1}\,dx.$$

Rozwiązanie: Najpierw podstawiamy:

$$\int \frac{e^x}{e^{3x}-1}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^3-1} = \int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1}.$$

Następnie rozwiązując prosty układ równań znajdujemy rozkład na ułamki proste:

$$\int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{3}\int \frac{t+2}{t^2+t+1}\,dt,$$

i liczymy obie całki:

$$\int \frac{dt}{t-1} = \log|t-1| + C,$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{t+2}{t^2+t+1}\,dt &= \frac{1}{2}\int \frac{2t+1+3}{t^2+t+1}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\log|t^2+t+1| + 2\int \frac{dt}{(\frac{2}{\sqrt{3}}t+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\log|t^2+t+1| + \sqrt{3}\int \frac{ds}{s^2+1}, \qquad s = \frac{2}{\sqrt{3}}\,t, \\
&= \frac{1}{2}\log|t^2+t+1| + \sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\,t + C.
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{e^{3x}-1}\,dx &= \frac{1}{3}\log|t-1| - \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\log(t^2+t+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\,t\Big) + C \\
&= \frac{1}{3}\log|e^x-1| - \frac{1}{6}\log(e^{2x}+e^x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\,e^x + C.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź punkt przecięcia stycznych (wystarczy tylko współrzędna x-owa tego punktu) do wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ w punktach:

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \text{oraz} \qquad \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Rozwiązanie: Równanie stycznej w punkcie $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ to

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Równanie stycznej w punkcie $(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ to

$$y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Przyrównujemy:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
x\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\
x(\sqrt{2} + 1) &= \pi\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \sqrt{3} - \sqrt{2} \\
x &= \frac{\pi\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Znajdź szereg Maclaurina funkcji:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

Jaki jest jego promień zbieżności?

Rozwiązanie: Liczymy pochodne:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1,\\
f'(x) &= \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} \;\Rightarrow\; f'(0) = -2,\\
f''(x) &= (-2)(-2)\frac{1}{(1+x)^3} \;\Rightarrow\; f''(0) = 4,\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n \cdot 2 \cdot n! \cdot \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \;\Rightarrow\; f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot 2 \cdot n!.
\end{aligned}$$

Ostatni wzór łatwo zauważyć i łatwo udowodnić indukcyjnie. Otrzymujemy więc:

$$f(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n!}{n!}\, x^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, x^n.$$

Współczynniki tego szeregu potęgowego to ± 1, więc łatwo zauważamy, np. z kryt. d'Alemberta, że promień zbieżności to 1