Zadanie 1. Oblicz całkę oznaczoną

$$\int_1^2 x\,(x^2+1)\,e^{x^2}\,dx.$$

Rozwiązanie: Robimy podstawienie $x^2 = t \;\Rightarrow\; x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$, następnie całkujemy przez części, i obliczamy

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\,(x^2+1)\,e^{x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^4 (t+1)\,e^t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\,(t+1)e^t\Big|_1^4 - \frac{1}{2}\int_1^4 e^t\,dt \\
&= \frac{1}{2}(5\,e^4 - 2\,e) - \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2}e \\
&= 2\,e^4 - \frac{1}{2}\,e.
\end{aligned}$$

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej, i jeśli jest zbieżna to ją oblicz

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+1}.$$

Rozwiązanie: $x^2+2x+1 = (x+1)^2$, czyli funkcja podcałkowa ma „osobliwość” w punkcie -1 (a więc na lewym końcu przedziału całkowania). Czyli musimy rozpatrzyć osobno dwie całki niewłaściwe, na przykład rozdzielmy przedział całkowania w punkcie 0:

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+1} \qquad \text{oraz} \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+1}.$$

Każda z powyższych całek ma już tylko jedną niewłaściwość, pierwsza ze względu na to, że funkcja podcałkowa jest nieograniczona przy lewym końcu przedziału, a druga ze względu na nieskończony przedział całkowania. Rozpatrzmy zbieżność pierwszej z całek.

$$\begin{aligned}
\int_{-1+\epsilon}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+1} &= \int_{-1+\epsilon}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2} \\
&= \{x+1=t\} = \int_{\epsilon}^{1} \frac{dy}{y^2} \\
&= -\left.\frac{1}{y}\right|_{\epsilon}^{1} \\
&= \frac{1}{\epsilon} - 1 \xrightarrow{\epsilon \to 0^+} \infty.
\end{aligned}$$

Całka ta nie jest więc zbieżna. W tej sytuacji zbieżność drugiej całki nie ma znaczenia. Całka niewłaściwa

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+1}$$

nie jest zbieżna

Zadanie 3. Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = (x + \sqrt{x})(2 + x^{1/3})(x^{1/4} + 1).$$

Rozwiązanie: Reguła Leibniza (różniczkowanie iloczynu) daje nam: $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$. Czyli:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x + \sqrt{x})'\,(2 + x^{1/3})\,(x^{1/4} + 1) + \\
&\quad + (x + \sqrt{x})\,(2 + x^{1/3})'\,(x^{1/4} + 1) + \\
&\quad\quad + (x + \sqrt{x})\,(2 + x^{1/3})\,(x^{1/4} + 1)' \\
&= \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(2 + x^{1/3})\,(x^{1/4} + 1) + \\
&\quad + (x + \sqrt{x})\left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{x^{2/3}}\right)(x^{1/4} + 1) + \\
&\quad\quad + (x + \sqrt{x})\,(2 + x^{1/3})\left(\frac{1}{4}\,\frac{1}{x^{3/4}}\right).
\end{aligned}$$

Wiele osób po prostu wymnażało nawiasy, i różniczkowało osobno 8 potęg x, i tak też jest oczywiście dobrze. Jeszcze inni stosowali wzór $f' = f(\log f)'$, co sprowadza się w tym wypadku do reguły Leibniza. Wszystkie sposoby liczenia pochodnej są dozwolone, ale nie można robić błędów.

Zadanie 4. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx.$$

Rozwiązanie: Robimy podstawienie

$$y = \sqrt{x+1} \;\Rightarrow\; dy = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx \;\Rightarrow\; 2\,dy = \frac{dx}{\sqrt{x+1}},\; x = y^2 - 1.$$

Po podstawieniu całka przybiera postać

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{2\,dy}{y^2-1}.$$

Funkcję podcałkową rozkładamy na ułamki proste, i otrzymujemy

$$\int \frac{2\,dy}{y^2-1} = \int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y+1} =$$

$$= \log|y-1| - \log|y+1| + C = \log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$$

Zadanie 5. Oblicz granicę ciągu

$$a_n = \frac{n^2 + 2 \cdot 1}{2n^3 + 1 \cdot 1} + \frac{n^2 + 2 \cdot 2}{2n^3 + 2 \cdot 2} + \frac{n^2 + 2 \cdot 3}{2n^3 + 3 \cdot 3} + \cdots + \frac{n^2 + 2 \cdot n}{2n^3 + n^2}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z twierdzenia o 3 ciągach. W powyższej sumie, jak łatwo zauważyć, jest n składników, a każdy ze składników łatwo oszacować z góry i z dołu:

$$n\,\frac{n^2 + 2}{2\,n^3 + n^2} \leq a_n \leq n\,\frac{n^2 + 2\,n}{2\,n^3 + 1},$$
$$\frac{n^3 + 2\,n}{2\,n^3 + n^2} \leq a_n \leq \frac{n^3 + 2\,n^2}{2\,n^3 + 1},$$
$$\frac{1 + 2\,\frac{2}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} \leq a_n \leq \frac{1 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n^3}}.$$

Skrajne ciągi mają wspólną granicę $\frac{1}{2}$, a więc, korzystając z twierdzenia o 3 ciągach

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 6. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right).$$

Rozwiązanie: Wyrażenie sprowadzamy do wspólnego mianownika, i zauważamy, że jest wyrażeniem typu $\frac{0}{0}$ w zerze:

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{\sin x-x}{x\,\sin x}.$$

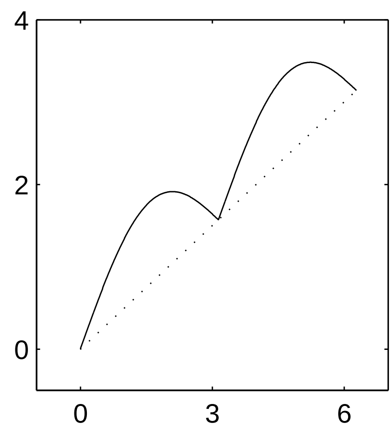
Stosujemy regułę de l'Hospitala dwukrotnie:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\,\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0.$$

Zadanie 7. Znajdź wartość największą i najmniejszą funkcji $f(x)$ w przedziale $[0, 2\pi]$

$$f(x) = |\sin x| + \frac{x}{2}.$$

Rozwiązanie: Wiemy, że $f(x)$ przyjmie swoje wartości największą i najmniejszą na końcach przedziału, w punktach, w których nie jest różniczkowalna, lub w takich punktach, w których jest różniczkowalna, a jej pochodna jest równa zero. Na przedziale $(0, \pi)$ funkcja dana jest wzorem $f(x) = \sin x + \frac{x}{2}$, czyli jest różniczkowalna, a na przedziale $(\pi, 2\pi)$ wzorem $f(x) = -\sin x + \frac{x}{2}$, więc też jest różniczkowalna. Może



Rysunek 1. Funkcja $f(x) = |\sin x| + \frac{x}{2}$ na $[0, 2\pi]$.

nie być różniczkowalna w π, więc ten punkt też weźmiemy pod uwagę. Szukamy punktów x_0, w których pochodna jest równa zero. Najpierw rozpatrzmy przedział $(0, \pi)$. Mamy

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \cos(x_0) = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\,\pi}{3}.$$

Podobnie na przedziale $(\pi, 2\pi)$:

$$f'(x) = -\cos x + \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \cos(x_0) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_0 = \frac{3\,\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\,\pi}{3}.$$

Takie charakterystyczne wartości funkcji trygonometrycznych trzeba pamiętać. Funkcje sinus i cosinus przyjmują wartość $\pm\frac{1}{2}$ w odległości $\frac{\pi}{6}$ od swojego przejścia przez zero. Mamy więc 5 punktów, w których $f(x)$ może przyjąć swoje wartości najmniejszą i największą. Są to 0, π, 2π, $\frac{2\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{3}$. Wystarczy obliczyć warości funkcji w tych punktach, i porównać.

$$f(0) = 0,\; f(2\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3},\; f(\pi) = \frac{\pi}{2},\; f(5\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\,\pi}{6},\; f(2\,\pi) = \pi.$$

Już na pierwszy rzut oka widać, że najmniejszą z tych wartości jest 0, natomiast wartość największa to $f(5\pi/3)$ lub $f(2\pi)$. Pozostaje tylko zauważyć, że pierwsza z tych wartości jest większa:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\,\pi}{6}>\frac{1,7}{2}+\frac{5\cdot 3}{6}=0,85+2,5=3,35>\pi.$$

Największą wartością jest więc $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\,\pi}{6}$.Zawsze warto naszkicować wykresik.

Zadanie 8. Rozstrzygnij zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}}{6^n}.$$

Rozwiązanie: Stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\frac{\binom{3(n+1)}{n+1}}{6^{n+1}}\cdot\frac{6^n}{\binom{3n}{n}}=\frac{\frac{(3(n+1))!}{(3n)!}}{6\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{(2(n+1))!}{(2n)!}}=$$

$$=\frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{3}{n}\right)}{6\,\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{2}{n}\right)}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{27}{6\cdot 4}=\frac{27}{24}>1.$$

Szereg jest więc rozbieżny.

Zadanie 9. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int x^2 \arctan x \, dx$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez części, a następnie podstawiamy:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \arctan x \, dx &= \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \arctan x \, dx \\
&= \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{1}{x^2+1} \, dx \\
&\left\{ y = x^2+1, \ \Rightarrow \frac{dy}{2} = x \, dx, \ x^2 = y-1 \right\} \\
&= \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{1}{6} \int \frac{(y-1)}{y} \, dy \\
&= \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{1}{6} \int \left(1 - \frac{1}{y}\right) \, dy \\
&= \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{y}{6} + \frac{1}{6} \log|y| + C \\
&= \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{x^2+1}{6} + \frac{1}{6} \log(x^2+1) + C.
\end{aligned}$$