Zadanie 1. Oblicz całkę niewłaściwą
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\,dx$$

Rozwiązanie: Obliczenie powyższej całki niewłaściwej sprowadza się do obliczenia dwóch granic:
$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\,dx \quad \text{oraz} \quad \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^0 \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\,dx.$$
Obliczmy najpierw całkę nieoznaczoną
$$\int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} t = \arctan x \\ dt = \frac{dx}{1+x^2} \end{array} \right\} = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} = \frac{\arctan^3 x}{3}.$$
Wstawiamy to do wzoru, i otrzymujemy
$$\int_0^M \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\,dx = \left.\frac{\arctan^3 x}{3}\right|_0^M = \frac{\arctan^3 M}{3} \xrightarrow{M\to\infty} \frac{\pi^3}{3\cdot 2^3}.$$
Podobnie postępujemy z drugą całką, otrzymujemy, że całka niewłaściwa jest zbieżna, i
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi^3}{12}$$

Zadanie 2. Obszar pod wykresem linii łańcuchowej

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

obraca się wokół osi OX. Oblicz objętość powstałej bryły obrotowej.

Rozwiązanie: Jak pamiętamy z wykładu, objętość tej bryły równa się całce

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{1} \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}\, dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}\, dx \\ &= \pi \left(\frac{e^{2x}}{8} + \frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{8} \right) \Bigg|_{-1}^{1} \\ &= \pi \left(\frac{e^2}{8} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{8} - \frac{e^{-2}}{8} - \frac{-1}{2} + \frac{e^2}{8} \right) \\ &= \pi \left(\frac{e^2}{4} + 1 - \frac{e^{-2}}{4} \right). \end{aligned}$$

Zadanie 3. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x\sin\frac{1}{x} & : \ x \neq 0, \\ A & : \ x = 0. \end{cases}$$

Dla jakiej wartości stałej A funkcja $f(x)$ jest ciągła?

Rozwiązanie: Zauważmy, że skoro funkcja $\sin x$ jest ograniczona, to

$$-|x| \leq x\sin\tfrac{1}{x} \leq |x|,$$

a więc

$$\lim_{x\to 0} x\sin\tfrac{1}{x} = 0,$$

czyli

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

Widzimy więc, że funkcja $f(x)$ jest ciągła w zerze jeżeli $A = 1$. W innych punktach jest oczywiście ciągła niezależnie od wartości A.

Zadanie 4. Znajdź wartość najmniejszą i największą danej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, \quad [-10, 12].$$

Rozwiązanie: Liczymy pochodną funkcji

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1).$$

Wartości najmniejsza i największa przyjęte są więc w którychś z punktów -10, -2, 1 lub 12. Porównajmy więc te wartości

$$\begin{aligned} f(-10) &= -2000 + 300 + 120 + 1 = -1579, \\ f(-2) &= -16 + 12 + 24 + 1 = 21, \\ f(1) &= 2 + 3 - 12 + 1 = -6, \\ f(12) &= 1728 + 432 - 144 + 1 = 3745. \end{aligned}$$

Nie trzeba wielkiego wysiłku, żeby zauważyć, że najmniejszą spośród powyższych wartości jest -1579 a największą 3745.

Zadanie 5. Prosta $y = x$ jest styczna do paraboli $y = x^2 + bx + c$ w punkcie $(1, 1)$. Znajdź stałe b i c

Rozwiązanie: Jeżeli parabola ma wogóle przechodzić przez punkt $(1, 1)$, to

$$1 = 1^2 + b + c \;\Rightarrow\; b + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -b.$$

Jeżeli parabola ma być dodatkowo styczna do danej prostej, to jej pochodna w tym punkcie musi być równa współczynnikowi kierunkowemu prostej, czyli 1.

$$(x^2 + bx - b)' = 2x + b, \text{ dla } x = 1 \;\Rightarrow\; 1 = 2 \cdot 1 + b \;\Rightarrow\; b = -1.$$

Ostatecznie więc $b = -1$ i $c = 1$.

Zadanie 6. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\big((n+\tfrac{1}{n})\pi\big)$$

Rozwiązanie: Po pierwsze zauważmy, że $\sin(n\pi + \frac{\pi}{n}) = (-1)^n \sin(\frac{\pi}{n})$. Po drugie zauważmy, że funkcja $\sin(x)$ jest rosnąca na $[0, \frac{\pi}{2}]$. Mamy więc

$$m, n \geq 2, m > n \;\Rightarrow\; \tfrac{\pi}{m} < \tfrac{\pi}{n} \;\Rightarrow\; \sin\tfrac{\pi}{m} < \sin\tfrac{\pi}{n}.$$

Ciąg

$$a_n = \sin\tfrac{\pi}{n}$$

jest więc malejący (do zera) dla $n \geq 2$, więc szereg naprzemienny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\big((n+\tfrac{1}{n})\pi\big) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, a_n$$

jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza.

Zadanie 7. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2}.$$

Rozwiązanie: Rozkładamy funkcję podcałkową na odpowiednie ułamki proste:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \\ &= \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2(A+B) + x(2A+B+C) + A}{x(x+1)^2}.\end{aligned}$$

Łatwo rozwiązujemy to, i otrzymujemy $A = 1$, $B = -1$ i $C = -1$. Mamy więc

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \\ = \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.\end{aligned}$$

Zadanie 8. Znajdź granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$$

Rozwiązanie: Stosujemy de l'Hôspitala dwukrotnie

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-2}{\cos^3 x}(-\sin x) + \sin x}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\cos^3 x} + 1 \right) \\
&= 3
\end{aligned}$$

Zadanie 9. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez podstawienie

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \left\{ \begin{array}{c} t = e^x \\ \frac{dt}{t} = dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{(t + \frac{1}{t})t} =$$
$$= \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t + C = \arctan e^x + C.$$