Egzamin końcowy 1 termin
24.01.12

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Znajdź promień zbieżności szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n\, x^n}{\sqrt{n}\, 3^n}.$$

Rozwiązanie: Wykorzystujemy wzór na promień zbieżności pochodzący z kryt. d'Alemberta:

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{(-2)^n}{\sqrt{n} \cdot 3^n} \cdot \frac{\sqrt{n+1} \cdot 3^n}{(-2)^{n+1}} \right| = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{3}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2}.$$

A więc $R = \frac{3}{2}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos\, x - 1}.$$

Rozwiązanie: Jest to wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$, więc stosujemy regułę de l'H0̂pitala:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1} = \lim_{n\to 0} \frac{e^{x^2}\cdot 2\,x}{-\sin x} = -2\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{\frac{\sin x}{x}} = -2\frac{1}{1} = -2.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Rozwiąż nierówność:

$$\left|\frac{2x-5}{x+3}\right| > 1.$$

Rozwiązanie: Zauważamy najpierw, że $x = -3$ nie jest rozwiązaniem, po czym wykluczając ten przypadek mnożymy nierówność stronami przez $|x+3|$:

$$|2\,x-5| > |x+3|.$$

Rozważamy osobno przypadki:

- $x < -3 \Rightarrow -(2x-5) > -(x+3) \Leftrightarrow -2x+5 > -x-3 \Leftrightarrow 8 > x$. Wszystkie $x < -3$ spełniają więc nierówność.
- $-3 < x < \frac{5}{2} \Rightarrow -(2x-5) > x+3 \Leftrightarrow -2x+5 > x+3 \Leftrightarrow 2 > 3x \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$. Nierówność jest więc spełniona przez wszystkie $-3 < x < \frac{2}{3}$.
- $x \geq \frac{5}{2} \Rightarrow 2x-5 > x+3 \Leftrightarrow x > 8$.

Rozwiązanie: $(-\infty,-3) \cup (-3,\frac{2}{3}) \cup (8,\infty)$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{1 - \sin^3 x}{1 + x^3}.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 - \sin^3 x)'(1 + x^3) - (1 - \sin^3 x)(1 + x^3)'}{(1 + x^3)^2} \\ &= \frac{-3\sin^2 x\ \cos x(1 + x^3) - (1 - \sin^3 x)\, 3\, x^2}{(1 + x^3)^2}. \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź wartości najmniejszą i największą podanej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = |x^3 - x| + \frac{x}{2}, \qquad x \in [-1, 1].$$

Rozwiązanie: Najpierw sprawdzimy, kiedy $x^3 - x$ zmienia znak:

$$x^3 - x > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \wedge x > 0 \text{ lub } x^2 - 1 < 0 \wedge x < 0.$$

Czyli dla $x \in (-1, 0)$ jest $x^3 - x > 0$, a dla $x \in (0, 1)$ jest $x^3 - x < 0$. Rozważamy więc przypadki:

- $x \in (0, 1)$. Wtedy $f(x) = x - x^3 + \frac{x}{2} = \frac{3x}{2} - x^3$, a więc $f'(x) = \frac{3}{2} - 3x^2$. Mamy więc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- $x \in (-1, 0)$. Wtedy $f(x) = x^3 - x + \frac{x}{2} = x^3 - \frac{x}{2}$, a więc $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}$. Mamy więc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6} = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Punkty, w których wartości musimy sprawdzić to ± 1 (końce), 0 (nieróżniczkowalność), $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}$ (punkty krytyczne).

$$f(-1) = -\tfrac{1}{2}, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = \tfrac{1}{2}, \quad f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,701\ldots$$

$$f(-\tfrac{1}{\sqrt{6}}) = \tfrac{-1}{6\sqrt{6}} + \tfrac{1}{\sqrt{6}} - \tfrac{1}{2\sqrt{6}} = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1_{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{6}) = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(\tfrac{6-3-1}{6}) = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tfrac{1}{3} < \tfrac{1}{2}.$$

Porównujemy wartości funkcji we wszystkich tych punktach, i otrzymujemy maksimum: $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i minimum: $f(-1) = -\frac{1}{2}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz całkę niewłaściwą, jeżeli jest zbieżna:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx.$$

Rozwiązanie: Niech $M > 0$

$$\int_0^M e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^M = 1 - e^{-M} \xrightarrow{M\to\infty} 1.$$

A więc całka jest zbieżna, i

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Funkcja $f(x)$ określona jest następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \ x < 0, \\ x & : \ 0 \leq x < 1, \\ -x^2 + 4x - 2 & : \ 1 \leq x < 3, \\ x - 3 & : \ x \geq 3. \end{cases}$$

Zbadaj ciągłość funkcji (czyli wskaż punkty nieciągłości, o ile istnieją).

Rozwiązanie: Mamy 3 punkty sklejenia: $0, 1, 3$ w których ciągłość funkcji trzeba sprawdzić. Poza tymi punktami funkcja jest wielomianem, więc jest ciągła.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0.$$

W 0 funkcja jest więc ciągła.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x^2 + 4x - 2) = -1 + 4 - 2 = 1.$$

W 1 funkcja też jest ciągła.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (-x^2 + 4x - 2) = -9 + 12 - 2 = 1,$$
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x - 3) = 0.$$

W punkcie 3 funkcja jest nieciągła. Jest to jedyny punkt nieciągłości funkcji f.

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Oblicz całkę oznaczoną:

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{8-2x^2}}.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{8-2x^2}} &= \int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \\
\left\{ \begin{array}{c} y = \frac{x}{2} \\ dy = \frac{1}{2}dx \end{array} \right\} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin y \Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$