Egzamin końcowy 1 termin
1.02.13

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Sprawdź, czy następujący szereg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie na całej prostej $(-\infty, \infty)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4 + n^2 + x^2}}.$$

Rozwiązanie: Dla każdego $x \in (-\infty, \infty)$ mamy

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^4 + n^2 + x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},$$

a szereg o wyrazach $\frac{1}{n^{4/3}}$ jest zbieżny. Z kryterium Weierstrassa nasz szereg jest zbieżny jednostajnie na $(-\infty, \infty)$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej, a jeżeli jest zbieżna, to ją oblicz:

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$$

Rozwiązanie: Weźmy dowolne $M > 1$.

$$\int_1^M \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2}dx \end{array} \right\} = -\int_1^{\frac{1}{M}} e^{-t}\,dt$$

$$= \int_{\frac{1}{M}}^1 e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_{\frac{1}{M}}^1 = -e^{-1} + e^{-\frac{1}{M}} \xrightarrow{M\to\infty} 1 - \frac{1}{e}.$$

Całka niewłaściwa jest więc zbieżna, i jest równa $1 - \frac{1}{e}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz długość wykresu funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(x-2)^3}, \qquad x \in [2,7].$$

Rozwiązanie: Mamy

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (x-2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x-2},$$

a więc

$$\begin{aligned}
L &= \int_2^7 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_2^7 \sqrt{1+\frac{1}{4}(x-2)}\,dx = \int_2^7 \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{x}{4}}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_2^7 \sqrt{2+x}\,dx = \frac{1}{2}\int_4^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_4^9 \\
&= \frac{1}{3}\left(9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(3^3-2^3\right) = \frac{1}{3}(27-8) \\
&= \frac{19}{3}.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź wartości największą i najmniejszą podanej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = |x+1| + x^2, \qquad [-2, 1].$$

Rozwiązanie: Sprawdzamy wartości na końcach i w punktach nieróżniczkowalności.

$$f(-2) = 1 + 4 = 5, \quad f(-1) = 1, \quad f(1) = 3.$$

Sprawdzamy punkty krytyczne:

$$x \le -1 \Rightarrow f(x) = -x - 1 + x^2 \Rightarrow f'(x) = -1 + 2x.$$

Punkt krytyczny to $x = \frac{1}{2}$, który leży poza rozpatrywanym zakresem.

$$x \ge -1 \Rightarrow f(x) = x + 1 + x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 + 2x.$$

Punkt krytyczny to $x = -\frac{1}{2}$, który wpada do rozpatrywanego zakresu.

$$f\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \Big|\frac{1}{2}\Big| + \Big(-\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Wartość najmniejsza to $\frac{3}{4}$, a największa to 5.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz całkę:

$$\int_0^{3\pi} |\sin(x)|\,dx.$$

Rozwiązanie: Wiemy, że $\sin x$ jest ≥ 0 w przedziałach $[0,\pi]$ i $[2\pi, 3\pi]$, oraz ≤ 0 w przedziale $[\pi, 2\pi]$. Mamy więc

$$\begin{aligned}
\int_0^{3\pi} |\sin(x)|\,dx &= \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin(x)\,dx \\
&= -\cos(x)\Big|_0^{\pi} + \cos(x)\Big|_{\pi}^{2\pi} - \cos(x)\Big|_{2\pi}^{3\pi} \\
&= -(-1-1) + 1 - (-1) - (-1-1) \\
&= 6.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz granicę funkcji:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(\log x)}{\log x}.$$

Rozwiązanie: To jest wyrażenie postaci $\frac{\infty}{\infty}$ w ∞, więc stosujemy regułę de l'Hôpitala:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\log(\log x)}{\log x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Dobierz stałe a, b tak, aby funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & : \ x \leq 1, \\ e^x & : \ x > 1 \end{cases}$$

była różniczkowalna w 1. Ile wtedy wynosi $f'(1)$?

Rozwiązanie: Po pierwsze funkcja musi być ciągła w 1, a więc

$$f(1) = 1 + a + b = e^1 \quad \Rightarrow \quad 1 + a + b = e.$$

Po drugie pochodne jednostronne muszą się zgadzać:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 + a(1+h) + b - 1 - a - b}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{2h + h^2 + ah}{h} \\ &= 2 + a \\ \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{1+h} - e}{h} \\ &= e, \end{aligned}$$

bo pochodna e^x w 1 jest równa e. A więc

$$2 + a = e \ \Rightarrow \ a = e - 2 \ \Rightarrow \ b = e - 1 - a = e - 1 - e + 2 = 1.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Oblicz promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}\, 3^{n+1}}{n^2}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z kryterium d'Alemberta. Ustalmy x, i obliczmy

$$\left| \frac{x^{2(n+1)} 3^{n+1+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{x^{2n} 3^{n+1}} \right| = \left| \frac{x^2 \cdot 3 \cdot n^2}{(n+1)^2} \right| = x^2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \to x^2 \cdot 3.$$

Widać więc, że $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.