Pierwsza litera nazwiska

Egzamin 1 termin
5.02.14

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej i oblicz ją, jeżeli jest zbieżna:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\log^3 x}.$$

Rozwiązanie: Funkcja podcałkowa jest ciągła na całej półprostej $[2,\infty)$, a więc niewłaściwość całki związana jest tylko z nieskończonym przedziałem całkowania. Ustalmy więc $M > 2$, i obliczmy:

$$\int_2^M \frac{dx}{x\log^3 x} = \left\{ \begin{matrix} t = \log x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{matrix} \right\} = \int_{\log 2}^{\log M} \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{t^2}\Big|_{\log 2}^{\log M} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log^2 2} - \frac{1}{\log^2 M}\right).$$

Gdy $M \to \infty$ to także $\log^2 M \to \infty$, a więc $\frac{1}{\log^2 M} \to 0$, czyli całka niewłaściwa istnieje i jest równa

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\log^3 x} = \lim_{M\to\infty} \int_2^M \frac{dx}{x\log^3 x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\log^2 2}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz długość krzywej będącej wykresem funkcji $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ dla $x \in [0, 5]$.

Rozwiązanie: Mamy $(x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}}$, a więc

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^5 \sqrt{4 + 9\,x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{9}\,(4 + 9\,x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^5 \\
&= \frac{1}{27}\left(49^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{27}(7^3 - 2^3) \\
&= \frac{335}{27}.
\end{aligned}
$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi: $y = \frac{5}{2} - x$ oraz $y = \frac{1}{x}$.

Rozwiązanie: Znajdujemy punkty przecięcia krzywych:

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{2} - x \;\Rightarrow\; x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}, 2.$$

Interesujący nas obszar leży więc ponad przedziałem $[\frac{1}{2}, 2]$. Pytanie jest która z funkcji jest większa na tym przedziale. Wystarczy sprawdzić w jednym punkcie, bo obie krzywe nie przecinają się już w żadnym innym punkcie, poza punktami nad końcami przedziału. Weźmy $x = 1$, i widać, że w tym punkcie $\frac{5}{2} - x > \frac{1}{x}$. Pole naszego obszaru wyraża się więc całką:

$$\begin{aligned}
P &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{5}{2} - x - \frac{1}{x}\right) dx \\
&= \frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \log x \Big|_{\frac{1}{2}}^{2} \\
&= \frac{5}{2}2 - \frac{2^2}{2} - \log 2 - \frac{5}{2}\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}^2}{2} + \log\frac{1}{2} \\
&= 5 - 2 - \frac{5}{4} + \frac{1}{8} - 2\log 2 \\
&= \frac{15}{8} - 2\log 2.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz całkę
$$\int_{e^3}^{e^8} \frac{dx}{x\sqrt{1+\log x}}.$$
Rozwiązanie: Robimy podstawienie
$$\int_{e^3}^{e^8} \frac{dx}{x\sqrt{1+\log x}} = \left\{ \begin{array}{l} t = \log x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{array} \right\} = \int_3^8 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2\sqrt{1+t}\Big|_3^8 = 2\left(\sqrt{9}-\sqrt{4}\right) = 2.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz całkę

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}.$$

Rozwiązanie: Robimy podstawienie

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} &= \left\{ \begin{array}{c} t = \sqrt[6]{x} \\ dt = \frac{1}{6}\frac{1}{x^{\frac{5}{6}}} \Rightarrow 6t^5 dt = dx \end{array} \right\} \\
&= 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3 - t^2} \\
&= 6 \int \frac{t^3\, dt}{t - 1} = \left\{ \begin{array}{c} s = t - 1 \\ ds = dt \end{array} \right\} \\
&= 6 \int \frac{(s+1)^3\, ds}{s} \\
&= 6 \int \frac{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}{s}\, ds \\
&= 6 \int \left(s^2 + 3s + 3 + \frac{1}{s}\right) ds \\
&= 2s^3 + 9s^2 + 18s + 6 \log|s| \\
&= 2(\sqrt[6]{x} - 1)^3 + 9(\sqrt[6]{x} - 1)^2 + 18(\sqrt[6]{x} - 1) + 6 \log|\sqrt[6]{x} - 1|.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Udowodnij, że jeżeli f i g są dwoma funkcjami ciągłymi na $[0, \infty)$, spełniającymi $0 \leq f(x) \leq g(x)$ dla wszystkich $x \geq 0$, oraz całka niewłaściwa $\int_0^\infty g(x)dx$ jest zbieżna, to także całka $\int_0^\infty f(x)dx$ jest zbieżna, oraz

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \leq \int_0^\infty g(x)\,dx.$$

Rozwiązanie: Ustalmy dowolne $M \geq 0$. Wtedy, z własności całek mamy

$$\int_0^M f(x)\,dx \leq \int_0^M g(x)\,dx \leq \int_0^\infty g(x)\,dx.$$

Ostatnia nierówność wynika z tego, że całka z nieujemnej funkcji g po przedziale $[M, \infty)$ jest nieujemna. Wyrażenie

$$\int_0^M f(x)\,dx$$

jako funkcja zmiennej M jest rosnące (gdy rośnie górna granica całki to zwiększa się przedział całkowania, a funkcja jest nieujemna), oraz ograniczone od góry przez $\int_0^\infty f(x)dx$. Ma więc granicę, również nie większą niż $\int_0^\infty f(x)dx$.

Niektóre osoby argumentowały następująco, co też jest prawidłowe: Dla funkcji nieujemnej całka reprezentuje pole obszaru pod wykresem (także całka niewłaściwa, obszar pod wykresem jest wtedy nieograniczony). Ponieważ $f(x) \leq g(x)$, więc obszar pod wykresem funkcji f jest zawarty w obszarze pod wykresem funkcji g. Pole mniejszego obszaru jest nie większe niż pole większego. W szczególności, jeżeli pole większego obszaru jest skończone, to pole mniejszego obszaru, zawartego w nim, też jest skończone, i zachodzi odpowiednia nierówność.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz całkę:

$$\int_0^{2\pi} x^3 \sin x \, dx.$$

Rozwiązanie: Będziemy całkowali przez części, aby pozbyć się potęgi x.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} x^3 \sin x \, dx &= \int_0^{2\pi} x^3 (-\cos x)' \, dx \\
&= -x^3 \cos x \Big|_0^{2\pi} + 3 \int_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx \\
&= -8\pi^3 + 3 \int_0^{2\pi} x^2 (\sin x)' \, dx \\
&= -8\pi^3 + 3 \Big(x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} x \sin x \, dx \Big) \\
&= -8\pi^3 - 6 \int_0^{2\pi} x (-\cos x)' \, dx \\
&= -8\pi^3 - 6 \Big(-x \cos x \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x \, dx \Big) \\
&= -8\pi^3 + 12\pi - 6 \int_0^{2\pi} \cos x \, dx \\
&= -8\pi^3 + 12\pi - 6 \sin x \Big|_0^{2\pi} \\
&= -8\pi^3 + 12\pi.
\end{aligned}$$