

Pierwsza litera nazwiska

**Egzamin 1 termin**  
**5.02.14**

Nazwisko i imię:

**Zadanie 1.** Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej i oblicz ją, jeżeli jest zbieżna:

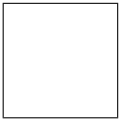
$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log^3 x}.$$

**Rozwiązanie:** Funkcja podcałkowa jest ciągła na całej półprostej  $[2, \infty)$ , a więc niewłaściwość całki związana jest tylko z nieskończonym przedziałem całkowania. Ustalmy więc  $M > 2$ , i obliczmy:

$$\int_2^M \frac{dx}{x \log^3 x} = \left\{ \begin{array}{l} t = \log x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\} = \int_{\log 2}^{\log M} \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2} \frac{1}{t^2} \Big|_{\log 2}^{\log M} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\log^2 2} - \frac{1}{\log^2 M} \right).$$

Gdy  $M \rightarrow \infty$  to także  $\log^2 M \rightarrow \infty$ , a więc  $\frac{1}{\log^2 M} \rightarrow 0$ , czyli całka niewłaściwa istnieje i jest równa

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log^3 x} = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_2^M \frac{dx}{x \log^3 x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\log^2 2}.$$



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

**Zadanie 2.** Oblicz długość krzywej będącej wykresem funkcji  $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$  dla  $x \in [0, 5]$ .

**Rozwiązanie:** Mamy  $(x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ , a więc

$$\begin{aligned} L &= \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^5 \sqrt{4 + 9x} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} (4 + 9x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^5 \\ &= \frac{1}{27} \left(49^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{27} (7^3 - 2^3) \\ &= \frac{335}{27}. \end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

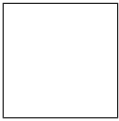
**Zadanie 3.** Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi:  $y = \frac{5}{2} - x$  oraz  $y = \frac{1}{x}$ .

**Rozwiązanie:** Znajdujemy punkty przecięcia krzywych:

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{2} - x \Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, 2.$$

Interesujący nas obszar leży więc ponad przedziałem  $[\frac{1}{2}, 2]$ . Pytanie jest która z funkcji jest większa na tym przedziale. Wystarczy sprawdzić w jednym punkcie, bo obie krzywe nie przecinają się już w żadnym innym punkcie, poza punktami nad końcami przedziału. Weźmy  $x = 1$ , i widać, że w tym punkcie  $\frac{5}{2} - x > \frac{1}{x}$ . Pole naszego obszaru wyraża się więc całką:

$$\begin{aligned} P &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left( \frac{5}{2} - x - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \log x \Big|_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= \frac{5}{2} \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - \log 2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}^2}{2} + \log \frac{1}{2} \\ &= 5 - 2 - \frac{5}{4} + \frac{1}{8} - 2 \log 2 \\ &= \frac{15}{8} - 2 \log 2. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz całkę

$$\int_{e^3}^{e^8} \frac{dx}{x\sqrt{1+\log x}}.$$

**Rozwiązanie:** Robimy podstawienie

$$\int_{e^3}^{e^8} \frac{dx}{x\sqrt{1+\log x}} = \left\{ \begin{array}{l} t = \log x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\} = \int_3^8 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2\sqrt{1+t} \Big|_3^8 = 2(\sqrt{9} - \sqrt{4}) = 2.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz całkę

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}.$$

Rozwiązanie: Robimy podstawienie

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} &= \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x} \\ dt = \frac{1}{6} \frac{1}{x^{5/6}} \Rightarrow 6t^5 dt = dx \end{array} \right\} \\ &= 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3 - t^2} \\ &= 6 \int \frac{t^3 dt}{t - 1} = \left\{ \begin{array}{l} s = t - 1 \\ ds = dt \end{array} \right\} \\ &= 6 \int \frac{(s + 1)^3 ds}{s} \\ &= 6 \int \frac{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}{s} ds \\ &= 6 \int \left( s^2 + 3s + 3 + \frac{1}{s} \right) ds \\ &= 2s^3 + 9s^2 + 18s + 6 \log |s| \\ &= 2(\sqrt[6]{x} - 1)^3 + 9(\sqrt[6]{x} - 1)^2 + 18(\sqrt[6]{x} - 1) + 6 \log |\sqrt[6]{x} - 1|. \end{aligned}$$

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 6.** Udowodnij, że jeżeli  $f$  i  $g$  są dwoma funkcjami ciągłymi na  $[0, \infty)$ , spełniającymi  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  dla wszystkich  $x \geq 0$ , oraz całka niewłaściwa  $\int_0^\infty g(x)dx$  jest zbieżna, to także całka  $\int_0^\infty f(x)dx$  jest zbieżna, oraz

$$\int_0^\infty f(x) dx \leq \int_0^\infty g(x) dx.$$

**Rozwiązanie:** Ustalmy dowolne  $M \geq 0$ . Wtedy, z własności całek mamy

$$\int_0^M f(x) dx \leq \int_0^M g(x) dx \leq \int_0^\infty g(x) dx.$$

Ostatnia nierówność wynika z tego, że całka z nieujemnej funkcji  $g$  po przedziale  $[M, \infty)$  jest nieujemna. Wyrażenie

$$\int_0^M f(x) dx$$

jako funkcja zmiennej  $M$  jest rosnące (gdy rośnie górna granica całki to zwiększa się przedział całkowania, a funkcja jest nieujemna), oraz ograniczone od góry przez  $\int_0^\infty f(x)dx$ . Ma więc granicę, również nie większą niż  $\int_0^\infty f(x)dx$ .

Niektóre osoby argumentowały następująco, co też jest prawidłowe: Dla funkcji nieujemnej całka reprezentuje pole obszaru pod wykresem (także całka niewłaściwa, obszar pod wykresem jest wtedy nieograniczony). Ponieważ  $f(x) \leq g(x)$ , więc obszar pod wykresem funkcji  $f$  jest zawarty w obszarze pod wykresem funkcji  $g$ . Pole mniejszego obszaru jest nie większe niż pole większego. W szczególności, jeżeli pole większego obszaru jest skończone, to pole mniejszego obszaru, zawartego w nim, też jest skończone, i zachodzi odpowiednia nierówność.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz całkę:

$$\int_0^{2\pi} x^3 \sin x \, dx.$$

**Rozwiązanie:** Będziemy całkować przez części, aby pozbyć się potęgi  $x$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x^3 \sin x \, dx &= \int_0^{2\pi} x^3 (-\cos x)' \, dx \\ &= -x^3 \cos x \Big|_0^{2\pi} + 3 \int_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx \\ &= -8\pi^3 + 3 \int_0^{2\pi} x^2 (\sin x)' \, dx \\ &= -8\pi^3 + 3 \left( x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} x \sin x \, dx \right) \\ &= -8\pi^3 - 6 \int_0^{2\pi} x (-\cos x)' \, dx \\ &= -8\pi^3 - 6 \left( -x \cos x \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x \, dx \right) \\ &= -8\pi^3 + 12\pi - 6 \int_0^{2\pi} \cos x \, dx \\ &= -8\pi^3 + 12\pi - 6 \sin x \Big|_0^{2\pi} \\ &= -8\pi^3 + 12\pi. \end{aligned}$$