Egzamin końcowy
29.01.10

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz granicę ciągu:

$$a_n = \frac{\sin(\sqrt{n^2+1})\,\cos(\sqrt{n^2+1})}{n^2+1}.$$

Rozwiązanie: Mamy:

$$|\sin(\sqrt{n^2+1})\,\cos(\sqrt{n^2+1})| \le 1 \quad \Rightarrow \quad |a_n| = \left|\frac{\sin(\sqrt{n^2+1})\,\cos(\sqrt{n^2+1})}{n^2+1}\right| \le \frac{1}{n^2+1},$$

a więc

$$-\frac{1}{n^2+1} \le a_n \le \frac{1}{n^2+1}.$$

Korzystając z twierdzenia o 3 ciągach, i z tego że, oczywiście, $\frac{1}{n^2+1} \to 0$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2\sqrt{2^n+3^n}}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2\sqrt{2^{n+1}+3^{n+1}}} \cdot \frac{n^2\sqrt{2^n+3^n}}{2^n} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{2\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}}{\sqrt{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}} \\
&\to \frac{2}{\sqrt{3}} > 1.
\end{aligned}$$

Korzystając z kryterium widzimy więc, że szereg jest rozbieżny.

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Dla jakich wartości parametrów a, b podana funkcja jest ciągła?

$$f(x) = \begin{cases} -x & : \quad x \leq -1 \\ 2 + ax - x^2 & : -1 < x \leq 2 \; . \\ x + b & : \quad 2 < x. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Obliczamy 4 granice jednostronne:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (-x) = 1,$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (2 + ax - x^2) = 1 - a,$$
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2 + ax - x^2) = -2 + 2a,$$
$$\lim_{x \to ^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + b) = 2 + b.$$

Otrzymujemy więc układ 2 równań, dających ciągłość funkcji f w punktach sklejenia -1 i 2:

$$\begin{cases} 1 & = 1 - a, \\ -2 + 2a & = 2 + b. \end{cases}$$

Z pierwszego $a = 0$, a z drugiego $b = -4$. Ciągłość poza punktami sklejenia wynika z tego, że są to wielomiany.

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to 0} \frac{6\,\log(x+1) - 6\,x + 3\,x^2 - 2\,x^3}{x\,\sin(x) - x^2\,\cos(x)}.$$

Rozwiązanie: Iloraz

$$\frac{6\,\log(x+1) - 6\,x + 3\,x^2 - 2\,x^3}{x\,\sin(x) - x^2\,\cos(x)}$$

jest w 0 wyrażeniem nieoznaczonym $\frac{0}{0}$. Zastosujemy więc regułę de l'Hôpitala. Obliczamy iloraz pochodnych:

$$\frac{(6\,\log(x+1) - 6\,x + 3\,x^2 - 2\,x^3)'}{(x\,\sin(x) - x^2\,\cos(x))'} = \frac{\frac{6}{x+1} - 6 + 6x - 6x^2}{\sin(x) - x\,\cos(x) + x^2\,\sin(x)}.$$

To jest również wyrażeniem nieoznaczonym $\frac{0}{0}$ w 0. Różniczkujemy ponownie:

$$\frac{(6\,\log(x+1) - 6\,x + 3\,x^2 - 2\,x^3)''}{(x\,\sin(x) - x^2\,\cos(x))''} = \frac{\frac{-6}{(x+1)^2} + 6 - 12x}{3\,x\,\sin(x) + x^2\cos(x)}.$$

W dalszym ciągu jest to wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$ w 0. Próbujemy ponownie:

$$\frac{(6\,\log(x+1) - 6\,x + 3\,x^2 - 2\,x^3)'''}{(x\,\sin(x) - x^2\,\cos(x))'''} = \frac{\frac{12}{(x+1)^3} - 12}{3\,\sin(x) + 5\,x\,\cos(x) - x^2\sin(x)}.$$

Znowuż wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$ w 0. Próbujemy ponownie:

$$\frac{(6\,\log(x+1) - 6\,x + 3\,x^2 - 2\,x^3)^{(4)}}{(x\,\sin(x) - x^2\,\cos(x))^{(4)}} = \frac{\frac{-36}{(x+1)^4}}{8\,\cos(x) - 7\,x\,\sin(x) - x^2\cos(x)}.$$

Ostatni ułamek ma granicę w 0 równą $\frac{-36}{8} = -\frac{9}{2}$. Otrzymujemy więc, iterując regułę de l'Hôpitala 4-krotnie

$$\lim_{x\to 0} \frac{6\,\log(x+1) - 6\,x + 3\,x^2 - 2\,x^3}{x\,\sin(x) - x^2\,\cos(x)} = -\frac{9}{2}.$$

Jeśli pamiętamy rozwinięcia Taylora w 0 występujących w ułamku funkcji, to granicę otrzymamy natychmiast.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = x^2\sqrt{x+1}\,e^x.$$

Rozwiązanie: Różniczkujemy iloczyn:

$$\begin{aligned}
(x^2\sqrt{x+1}\,e^x)' &= (x^2)'\cdot(\sqrt{x+1}\,e^x) + (x^2)\cdot(\sqrt{x+1}\,e^x)' \\
&= 2x\sqrt{x+1}\,e^x + x^2\big((\sqrt{x+1})'\,e^x + (\sqrt{x+1})\cdot(e^x)'\big) \\
&= 2x\sqrt{x+1}\,e^x + x^2\big(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,e^x + \sqrt{x+1}\,e^x\big) \\
&= 2x\sqrt{x+1}\,e^x + \frac{x^2\,e^x}{2\sqrt{x+1}} + x^2\sqrt{x+1}\,e^x.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź wartości najmniejszą i największą podanej funkcji w podanym przedziale:

$$f(x) = |x-1| + x^2, \qquad [-5,5].$$

Rozwiązanie: Wartość najmniejsza i największa może być przyjęta na końcach przedziału, w punktach nieróżniczkowalności i w punktach w których pochodna jest równa 0. Musimy więc rozważyć punkty -5, 5 oraz 1. Sprawdźmy, gdzie zeruje się pochodna. Rozważmy najpierw przedział $(1,5)$. W tym przedziale $f(x) = x - 1 + x^2$, a więc

$$f'(x) = 1 + 2x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

W tym przedziale nie ma więc zer pochodnej. Rozważmy teraz przedział $(-5,1)$. W tym przedziale $f(x) = 1 - x + x^2$, a więc

$$f'(x) = -1 + 2x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Znaleźliśmy więc punkt, w którym pochodna naszej funkcji się zeruje. Jest tylko jeden taki punkt, $x = \frac{1}{2}$ i ten punkt też musimy rozważyć. Obliczamy więc i porównujemy wartości funkcji w punktach -5, 5, 1 i $\frac{1}{2}$:

$$f(-5) = 6 + 25 = 31, \qquad f(5) = 4 + 25 = 29, \qquad f(1) = 1, \qquad f\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Wiemy już wszystko: wartość największa wynosi 31 i jest przyjęta w lewym końcu przedziału, a wartość najmniejsza wynosi $\frac{3}{4}$ i przyjęta jest w jedynym punkcie krytycznym $x = \frac{1}{2}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$$

Rozwiązanie: Spróbujmy podstawienie $t = 1 + \sqrt[3]{x+1}$. Mamy

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} &= \left\{ \begin{array}{c} {\scriptstyle t=1+\sqrt[3]{x+1}} \\ {\scriptstyle x=(t-1)^3-1} \\ \frac{dx}{dt} = 3(t-1)^2 \end{array} \right\} = \int \frac{3(t-1)^2}{t}\, dt \\
&= \int (3t - 6 + \frac{3}{t})\, dt \\
&= \frac{3}{2}\, t^2 - 6\, t + 3\, \log(|t|) \\
&= \frac{3}{2}\, (1+\sqrt[3]{x+1})^2 - 6\, (1+\sqrt[3]{x+1}) + 3\, \log(1+\sqrt[3]{x+1})
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Sprawdź, że podana całka niewłaściwa jest zbieżna, i oblicz ją:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx.$$

Rozwiązanie: Rozważamy oddzielnie dwie całki niewłaściwe:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx \quad \text{oraz} \quad \int_{0}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$$

Pierwsza całka:

$$\lim_{M\to-\infty}\int_{M}^{0} e^{-|x|}\,dx = \lim_{M\to-\infty}\int_{M}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{M\to-\infty} e^{x}\big|_{M}^{0} = \lim_{M\to-\infty}(e^{0}-e^{M}) = 1.$$

Całka ta jest więc zbieżna, i jest równa 1. Teraz druga całka:

$$\lim_{M\to\infty}\int_{0}^{M} e^{-|x|}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_{0}^{M} e^{-x}\,dx = \lim_{M\to\infty} -e^{-x}\big|_{0}^{M} = \lim_{M\to\infty}(-e^{-M}+e^{0}) = 1.$$

Ta całka jest również zbieżna (nic w tym dziwnego, skoro funkcja jest parzysta), i też równa 1. Z definicji mamy więc:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = 1+1 = 2.$$