Pierwsza litera nazwiska

Egzamin końcowy 2 termin
20.02.17

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Znajdź granicę:

$$\lim_{x\to 1}\Big(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\Big).$$

Rozwiązanie: Niech $t=\sqrt[6]{x}$. Zauważmy, że $x\to 1^+ \Leftrightarrow t\to 1^+$. (Ponieważ dziedziną funkcji są liczby nieujemne, to granica jest granicą prawostronną.) Mamy więc:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\Big(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\Big) &= \lim_{t\to 1^+}\Big(\frac{1}{2(1-t^3)}-\frac{1}{3(1-t^2)}\Big)\\
&= \lim_{t\to 1^+}\Big(\frac{1}{2(1-t)(1+t+t^2)}-\frac{1}{3(1-t)(1+t)}\Big)\\
&= \frac{1}{6}\lim_{t\to 1^+}\frac{3(1+t)-2(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t+t^2)(1+t)}\\
&= \frac{1}{6}\lim_{t\to 1^+}\frac{(1-t)(1+2t)}{(1-t)(1+t+t^2)(1+t)}\\
&= \frac{1}{6}\lim_{t\to 1^+}\frac{1+2t}{(1+t+t^2)(1+t)}\\
&= \frac{1}{6}\,\frac{3}{3\cdot 2}\\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz całkę niewłaściwą, lub pokaż, że nie istnieje:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot x \, dx \qquad (\cot x = \text{cotangens x}).$$

Rozwiązanie: Niewłaściwość całki dotyczy lewego końca przedziału $[0, \frac{\pi}{2}]$. Weźmy więc $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \cot x \, dx &= \int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \\
&= \left\{ \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right\} \\
&= \int_{\sin \epsilon}^{1} \frac{dt}{t} \\
&= \log t \Big|_{\sin \epsilon}^{1} \\
&= 0 - \log \sin \epsilon.
\end{aligned}$$

Gdy $\epsilon \to 0^+$ mamy $\sin \epsilon \to 0^+$ i $\log \sin \epsilon \to -\infty$, więc całka jest rozbieżna.

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz granicę (możesz użyć całki Riemanna):

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n}{2n^2}+\frac{n}{n^2+(n+1)^2}+\frac{n}{n^2+(n+2)^2}+\frac{n}{n^2+(n+3)^2}+\cdots+\frac{n}{50n^2}\Big).$$

Rozwiązanie: Przekształcamy sumę trochę:

$$\frac{n}{2n^2}+\frac{n}{n^2+(n+1)^2}+\frac{n}{n^2+(n+2)^2}+\frac{n}{n^2+(n+3)^2}+\cdots+\frac{n}{50n^2}=\sum_{k=0}^{6n}\frac{n}{n^2+(n+k)^2}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{6n}\frac{n^2}{n^2+(n+k)^2}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{6n}\frac{1}{1+(1+\frac{k}{n})^2}.$$

Widzimy, że jest to suma Riemanna dla funkcji $f(x)=\frac{1}{1+(1+x)^2}$, przedziału $[0,6]$ i podziału $P=\{0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{6n-1}{n}<6\}$. (Jeden skrajny wyraz można odrzucić, gdyż dąży do 0 gdy $n\to\infty$.) W takim razie

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n}{2n^2}+\frac{n}{n^2+(n+1)^2}+\frac{n}{n^2+(n+2)^2}+\frac{n}{n^2+(n+3)^2}+\cdots+\frac{n}{50n^2}\Big)=$$

$$=\int_0^6\frac{dx}{1+(1+x)^2}$$

$$=\int_1^7\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\arctan x\Big|_1^7$$

$$=\arctan 7-\frac{\pi}{4}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność jednostajną ciągu funkcyjnego na podanym zbiorze:

$$f_n(x) = n \sin\left(\frac{2\,x}{n}\right), \qquad [-\pi, \pi].$$

Rozwiązanie: Wiem, że

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \quad \text{gdy} \quad x \to 0, \tag{1}$$

a więc

$$n\ \sin\left(\frac{2x}{n}\right) = \frac{\sin \frac{2x}{n}}{\frac{2x}{n}} \cdot 2x \ \to\ 1,$$

bo $\frac{2x}{n} \to 0$ gdy $n \to \infty$ dla ustalonego x. Mamy więc zbieżność punktową $f_n(x) \to 2x$. Z (1) mamy

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ |y| < \delta\ \Rightarrow\ \left|\frac{\sin y}{y} - 1\right| < \epsilon. \tag{2}$$

Mając dane $\epsilon > 0$ weźmy $\delta > 0$ dane przez (2) dla $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2\pi}$, oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{2\pi}{n_0} < \delta$. Wtedy, dla $n \geq n_0$ i dowolnego $x \in [-\pi, \pi]$ mamy:

$$\left|\frac{2x}{n}\right| \leq \frac{2\pi}{n_0} < \delta \ \Rightarrow\ \left|\frac{\sin \frac{2x}{n}}{\frac{2x}{n}} - 1\right| < \frac{\epsilon}{2\pi} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left|n\ \sin\frac{2x}{n} - 2x\right| = |2x| \left|\frac{\sin \frac{2x}{n}}{\frac{2x}{n}} - 1\right| < \epsilon.$$

n_0 jest dobrane nezależnie od $x \in [-\pi, \pi]$, więc zbieżność jest jednostajna.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Udowodnij ostrą nierówność:

$$2\sqrt{2} < \int_2^4 x^{\frac{1}{x}}\,dx.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że $x^{\frac{1}{x}}$ przyjmuje tą samą wartość $\sqrt{2}$ na obu końcach przedziału $[2,4]$: $2^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$. Zbadajmy pochodną:

$$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\log x}\right)' = e^{\frac{1}{x}\log x}\left(-\frac{1}{x^2}\log x + \frac{1}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x).$$

Widzimy, że pochodna jest >0 na $[2,e)$ i <0 na $(e,4]$, czyli w e funkcja ma ścisłe maksimum. Jest więc ściśle większa od $\sqrt{2}$ na przedziale $[2,4]$, z wyjątkiem końców, gdzie jest równość. Mamy więc

$$\int_2^4 x^{\frac{1}{x}}\,dx \geq \int_2^4 \sqrt{2}\,dx = 2\sqrt{2}.$$

Wiemy, że jeżeli funkcja jest ciągła i jest ściśle dodatnia (tak jak $x^{\frac{1}{x}} - \sqrt{2}$) na przedziale, poza, być może, końcami, gdzie jest równa 0, to jej całka jest ściśle dodatnia. Nierówność jest więc ścisła.

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz całkę oznaczoną:

$$\int_0^5 |x^2 - 5x - 6|\, dx.$$

Rozwiązanie: Mamy $x^2 - 5x - 6 = (x-6)(x+1)$, więc to wyrażenie jest ujemne na przedziale $(-1, 6)$, więc

$$\begin{aligned}
\int_0^5 |x^2 - 5x - 6|\, dx &= -\int_0^5 (x^2 - 5x - 6)\, dx \\
&= -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x\Big|_0^5 \\
&= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} + 30 \\
&= \frac{-125 \cdot 2 + 125 \cdot 3 + 180}{6} \\
&= \frac{305}{6}.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

Rozwiązanie: Podstawiamy:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx &= \left\{ \begin{array}{c} t=\sqrt[6]{x} \\ dt=\frac{1}{6}\frac{1}{(\sqrt[6]{x})^5}\,dx \;\Rightarrow\; 6t^5\,dt=dx \end{array} \right\} \\
&= 6\int \frac{t^3t^5\,dt}{t^3-t^3} \\
&= 6\int \frac{t^6\,dt}{t-1} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} s=t-1 \\ ds=dt \end{array} \right\} \\
&= 6\int \frac{(s+1)^6\,ds}{s} \\
&= 6\int \frac{s^6+6s^5+15s^4+20s^3+15s^2+6s+1}{s}\,ds \\
&= 6\int (s^5+6s^4+15s^3+20s^2+15s+6+\frac{1}{s})\,ds \\
&= s^6+\frac{36}{5}\,s^5+\frac{45}{2}\,s^4+40\,s^3+45\,s^2+36\,s+6\log|s|+C \\
&= (\sqrt[6]{x}+1)^6+\frac{36}{5}\,(\sqrt[6]{x}+1)^5+\frac{45}{2}\,(\sqrt[6]{x}+1)^4+40\,(\sqrt[6]{x}+1)^3+ \\
&\quad +45\,(\sqrt[6]{x}+1)^2+36\,(\sqrt[6]{x}+1)+6\log(\sqrt[6]{x}+1)+C.
\end{aligned}$$