Zadanie 1. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx.$$

Rozwiązanie. Funkcja podcałkowa to funkcja wymierna, przy czym stopień licznika jest niższy od stopnia mianownika. Wiemy, że funkcja taka rozkłada się na ułamki proste postaci

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}.$$

porównując obie strony otrzymujemy $A = 1,\ B = 0,\ C = D = -1$. Mamy więc

$$\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx = \int \frac{x}{x^2+2}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx - \int \frac{dx}{(x^2+2)^2}.$$

W pierwszej i drugiej całce robimy podstawienie $x^2+2=t$, wtedy $x\,dx = \frac{dt}{2}$, a więc

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+2}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2}\\ &= \frac{1}{2}\log|t| + \frac{1}{2}\frac{1}{t} + C\\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+2) + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2} + C.\end{aligned}$$

Do ostatniej całki stosujemy wzór rekurencyjny z wykładu, który możemy sobie również wyprowadzić:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+2)} &= \int \frac{x^2+2}{(x^2+2)^2}\,dx\\ &= \int \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx + 2\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}\\ &= \int x\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x^2+2}\right)'\,dx + 2\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}\\ &= -\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx + 2\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}.\end{aligned}$$

Rozwiązując powyższe równanie, otrzymujemy wzór rekurencyjny

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{4}\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx.$$

Pozostaje ostatnia całka, w której robimy podstawienie $x = \sqrt{2}\,t$, czyli $dx = \sqrt{2}\,dt$, a więc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \sqrt{2}\int \frac{dt}{2\,t^2+2} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\arctan t + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.\end{aligned}$$

Pozostaje pozbierać te wszystkie całki.

Zadanie 2. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\tan x}.$$

Rozwiązanie. Wiemy, że $\lim_{x\to 0^+} \tan x = 0$, przy czym dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$ mamy $\tan x > 0$, więc wystarczy obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Ta granica była obliczona w klasie, i wiemy, że wynosi ona 1. Nie musimy tego pamiętać, możemy też zapisać $x^x = e^{x\log x}$, i obliczyć granicę korzystając z reguły de l'Hôspitala, oraz z ciągłości funkcji wykładniczej e^x. Tak czy inaczej, otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\tan x} = 1.$$

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\,\log x}.$$

Rozwiązanie. W powyższej całce występują dwie osobliwości, jedna ze względu na nieskończony przedział całkowania, a druga ze względu na nieograniczoność funkcji podcałkowej w lewym końcu. Całkę rozbijamy więc dowolnie na dwie całki po dwóch podprzedziałach, i sprawdzamy zbieżność każdej z całek niewłaściwych z osobna:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\,\log x}, \qquad \int_2^\infty \frac{dx}{x\,\log x}.$$

Obliczmy funkcję pierwotną

$$\int \frac{dx}{x\,\log x} = \left\{ \log x = t \ \Rightarrow \ dt = \frac{dx}{x} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| = \log|\log x|.$$

Zauważmy, że funkcja pierwotna nie ma granicy ani gdy $x \to \infty$, ani gdy $x \to 0^+$. Wynika stąd, obie powyższe całki niewłaściwe są rozbieżne. Na przykład

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\,\log x} = \lim_{M\to\infty} \int_2^M \frac{dx}{x\,\log x} = \lim_{M\to\infty} (\log|\log M| - \log|\log 2|) = +\infty.$$

Wystarczy, że jedna z dwóch całek niewłaściwych nie istnieje, więc całka niewłaściwa

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\,\log x}.$$

nie istnieje.

Zadanie 4. Niech funkcja $f(x)$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}-1}{x} & : \text{ dla } x \neq 0 \\ -1 & : \text{ dla } x = 0. \end{cases}$$

Oblicz $f'(0)$.

Rozwiązanie. Skorzystamy z definicji pochodnej

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{-x}-1}{x} + 1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} \\ \text{de l'H} \quad &= \lim_{x\to 0} \frac{-e^{-x} + 1}{2\,x} \\ \text{de l'H} \quad &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pochodna w 0 istnieje więc, i wynosi $\frac{1}{2}$.

Zadanie 5. Oblicz całkę oznaczoną

$$\int_{-\sqrt{\frac{3}{5}}}^{\sqrt{\frac{3}{5}}} \frac{dx}{\sqrt{3-5\,x^2}}.$$

Rozwiązanie. Całka jest niewłaściwa, ze względu na nieograniczoność funkcji podcałkowej w obu końcach przedziału całkowania. Obliczmy najpierw funkcję pierwotną

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{3-5\,x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{5}{3}\,x^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\,x\right)^2}} \\
&= \left\{ \sqrt{\frac{5}{3}}\,x = t \;\Rightarrow\; dx = \sqrt{\frac{3}{5}}\,dt \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3}{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin t + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\,x\right) + C
\end{aligned}$$

Ostatnią całkę moglibyśmy sobie przypomnieć z wykładu, albo możemy też zrobić podstawienie $t = \sin s$. Zauważmy, że funkcja pierwotna ma granice w obu końcach przedziału całkowania, więc

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{\frac{3}{5}}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{3-5\,x^2}} &= \lim_{\epsilon\to-\sqrt{\frac{3}{5}}^+} \int_{\epsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{3-5\,x^2}} = \\
&= \lim_{\epsilon\to-\sqrt{\frac{3}{5}}^+} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\,0\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\,\epsilon\right)\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \big(\arcsin(0) - \arcsin(-1)\big) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Podobnie obliczamy drugą całkę niewłaściwą

$$\int_{0}^{\sqrt{\frac{3}{5}}} \frac{dx}{\sqrt{3-5\,x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{\pi}{2},$$

i w końcu dodając obie całki otrzymujemy

$$\int_{-\sqrt{\frac{3}{5}}}^{\sqrt{\frac{3}{5}}} \frac{dx}{\sqrt{3-5\,x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$