Zadanie 1. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^{20} + 2^{20} + 3^{20} + \cdots + n^{20}}{n^{21}}$$

Rozwiązanie: Sumę zapisujemy następująco:

$$\frac{1^{20} + 2^{20} + 3^{20} + \cdots + n^{20}}{n^{21}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{20}.$$

W powyższej sumie rozpoznajemy sumę Riemanna dla funkcji $f(x) = x^{20}$, przedziału $[0,1]$ i podziału punktami $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Średnica takiego podziału jest równa $\frac{1}{n}$ i dąży do 0 gdy $n \to \infty$. Funkcja $f(x)$ jest ciągła, a więc mamy

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{20} &= \int_0^1 x^{20}\,dx \\
&= \left.\frac{x^{21}}{21}\right|_0^1 \\
&= \frac{1}{21}.
\end{aligned}$$

Zadanie 2. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9}\,dx.$$

Rozwiązanie: Funkcja podcałkowa jest wymierna. Mamy więc

$$\frac{2x-1}{x^2-6x+9} = \frac{2x-1}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}.$$

Porównując liczniki otrzymujemy $A(x-3)+B = 2x-1$, czyli $A=2$ i $B=5$. Mamy więc

$$\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9}\,dx = \int \frac{2}{x-3}\,dx + \int \frac{5}{(x-3)^2}\,dx = 2\log|x-3| - \frac{5}{x-3}.$$

Zadanie 3. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez podstawienie

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx \\
&= \left\{ \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \end{array} \right\} \\
&= -\int \frac{dt}{t^3} \\
&= \frac{1}{2}\, t^{-2} \\
&= \frac{1}{2\, \cos^2 x}
\end{aligned}$$

Zadanie 4. Znajdź wartość najmniejszą i największą danej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = |x^2 - 1| + 3x, \quad [-2, 2].$$

Rozwiązanie: Wiemy, że wartość najmniejszą i największą funkcja przyjmuje w punktach w których pochodna jest równa 0, w punktach, w których pochodna nie istnieje, lub na końcach przedziału. Powyższa funkcja może nie być różniczkowalna w punktach w których $x^2 - 1 = 0$, czyli ± 1. Poszukajmy teraz zero pochodnej. Rozpatrzymy dwa przypadki

$$|x| \geq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - 1 + 3x.$$

Wtedy

$$f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Punkt $x = -\frac{3}{2}$ wpada do rozważanego zakresu $|x| \geq 1$, a więc mamy punkt w którym pochodna jest zerem. Rozważamy drugi przypadek

$$|x| \leq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow f(x) = 1 - x^2 + 3x,$$

czyli

$$f'(x) = -2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Tym razem jednak punkt $x = \frac{3}{2}$ nie wpada do rozważanego zakresu, czyli w tym przypadku zer pochodnej nie ma. Mamy więc 5 punktów w których wartości funkcji należy porównać: $-2, -\frac{3}{2}, -1, 1$ oraz 2.

$$\begin{aligned}
&f(-2) = 3 - 6 = -3 \\
&f(-\tfrac{3}{2}) = \tfrac{5}{4} - \tfrac{9}{2} = -\tfrac{13}{4} \\
&f(-1) = -3 \\
&f(1) = 3 \\
&f(2) = 3 + 6 = 9.
\end{aligned}$$

Porównując powyższe widzimy, że wartość największa to 9, a najmniejsza to $-\frac{13}{4}$.

Zadanie 5. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\log(1-x)$$

Rozwiązanie: Niech $t = 1 - x$, wtedy

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\log(1-x) = \lim_{t\to 0^+} t\log t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log t}{\frac{1}{t}}.$$

Jest to wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{\infty}{\infty}$, a więc korzystając z reguły de l'Hôspitala otrzymujemy

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = -\lim_{t\to 0^+} t = 0.$$

Granica wynosi więc 0.

Zadanie 6. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$$

Rozwiązanie: Niech $a_n = \frac{1}{n \log n}$, wtedy ciąg a_n jest malejący i zbieżny do 0. Możemy więc skorzystać bezpośrednio z kryterium Leibniza, i otrzymujemy, że szereg jest zbieżny.

Zadanie 7. Obszar pod wykresem funkcji

$$f(x) = \sqrt{3x - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

obraca się wokół osi OX. Oblicz objętość powstałej bryły obrotowej.

Rozwiązanie: Liczymy ze wzoru:

$$V = \pi \int_0^2 f(x)^2\, dx = \pi \int_0^2 (3x - x^2)\, dx = \pi \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi \left(\frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 8 \right) = \pi \left(\frac{36}{6} - \frac{16}{6} \right) = \pi \frac{20}{6} = \frac{10\pi}{3}.$$

Zadanie 8. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej, oraz oblicz ją, jeżeli jest zbieżna

$$\int_0^\infty x^3 \sin(x^4)\,dx$$

Rozwiązanie: Niech $M > 0$ i rozważmy całkę

$$\begin{aligned}
\int_0^M x^3 \sin(x^4)\,dx &= \frac{1}{4}\int_0^M 4x^3 \sin(x^4)\,dx \\
&= \left\{ \begin{array}{c} t = x^4 \\ dt = 4x^3\,dx \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{M^4} \sin t\,dt \\
&= -\frac{1}{4}\cos t\Big|_0^{M^4} \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - \cos M^4\right).
\end{aligned}$$

Oczywiście ostatnie wyrażenie nie ma granicy gdy $M \to \infty$. Całka niewłaściwa nie jest więc zbieżna.