Egzamin końcowy 2 termin
15.02.13

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Podaj wzór na pochodną rzędu n funkcji:

$$f(x) = \frac{1-2\,x}{1+x}.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że f można zapisać

$$f(x) = \frac{1-2\,x}{1+x} = \frac{3-2\,(1+x)}{1+x} = \frac{3}{1+x} - 2.$$

Liczymy więc:

$$f'(x) = 3 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = 3 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{(1+x)^3}$$

$$f'''(x) = 3 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \frac{1}{(1+x)^4}.$$

Łatwo zauważyć (i udowodnić indukcyjnie), że ogólny wzór jest następujący:

$$f^{(n)}(x) = 3 \cdot (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{(1+x)^{n+1}}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź przedziały wypukłości i punkty przegięcia funkcji:

$$f(x) = x^4 + \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

Rozwiązanie: Wypukłość ustalamy przy użyciu znaku 2 pochodnej. Liczymy więc 2 pochodną:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \\ f''(x) &= 12\,x^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Szukamy punktów zerowych:

$$\begin{aligned} 12\,x^2 &= \frac{1}{4\,x^{\frac{3}{2}}} \\ 48\,x^{\frac{7}{2}} &= 1 \\ x &= \left(\frac{1}{48}\right)^{\frac{2}{7}}. \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że dla x mniejszych od tej wartości 2 pochodna jest < 0, czyli f jest wklęsła, a dla x większych 2 pochodna jest dodatnia a funkcja wypukła. Punkt $x = \left(\frac{1}{48}\right)^{\frac{2}{7}}$ jest więc jedynym punktem przegięcia.

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

Rozwiązanie: Zastosujemy podstawienie

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{ \begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{array} \right\} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} + C.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz całkę oznaczoną:

$$\int_0^\pi x^3 \sin(x)\, dx.$$

Rozwiązanie: Zastosujemy całkowanie przez części:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x^3 \sin(x)\, dx &= \int_0^\pi x^3 (-\cos x)'\, dx \\
&= -x^3 \cos x\Big|_0^\pi + 3\int_0^\pi x^2 \cos x\, dx \\
&= \pi^3 + 3\int_0^\pi x^2 (\sin x)'\, dx \\
&= \pi^3 + 3\, x^2 \sin x\Big|_0^\pi - 6\int_0^\pi x \sin x\, dx \\
&= \pi^3 + 6\int_0^\pi x(\cos x)'\, dx \\
&= \pi^3 + 6\, x \cos x\Big|_0^\pi - 6\int_0^\pi \cos x\, dx \\
&= \pi^3 - 6\pi - 6 \sin x\Big|_0^\pi \\
&= \pi^3 - 6\,\pi.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Udowodnij, że następujący szereg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie na całej prostej:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x| + n^{3/2}}.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że:

$$\left| \frac{(-1)^n}{|x| + n^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}, \quad \forall\, x \in (-\infty, \infty),$$

a szereg liczbowy o wyrazach $\frac{1}{n^{3/2}}$ jest zbieżny (bo $\frac{3}{2} > 1$). Korzystając z kryterium Weierstrassa szereg funkcyjny jest zbieżny na całej prostej.

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź punkt przecięcia stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ odpowiednio w punktach $(-1, -1)$ i $(3, 27)$.

Rozwiązanie: Mamy $f'(x) = 3\,x^2$, a więc znajdujemy równania stycznych w danych punktach

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 3 \qquad & y + 1 = 3(x+1) \;&\Rightarrow\; y = 3\,x + 2, \\ f'(3) &= 27 \qquad & y - 27 = 27\,(x-3) \;&\Rightarrow\; y = 27\,x - 54. \end{aligned}$$

Mamy znaleźć punkt przecięcia tych dwóch prostych, a więc

$$\begin{aligned} 3\,x + 2 &= 27\,x - 54 \\ 24\,x &= 56 \\ x &= \frac{7}{3}, \end{aligned}$$

w takim razie

$$y = 3\,x + 2 = 7 + 2 = 9.$$

Punktem przecięcia jest więc punkt $\left(\frac{7}{3}, 9\right)$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Rozstrzygnij zbieżność i ewentualnie zbieżność absolutną szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{\sqrt[4]{n+3}}.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że $(-1)^{n^2} = (-1)^n$, a więc szereg jest naprzemienny. Jest on zbieżny z kryterium Leibniza, bo ciąg $\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{(n+3)}}\right\}$ jest dodatni i zbieżny monotonicznie do 0. Szereg nie jest zbieżny absolutnie, bo po nałożeniu wartości bezwzględnych otrzymujemy szereg o wyrazach $\left\{\frac{1}{(n+3)^{1/4}}\right\}$ który jest rozbieżny (bo $1/4 \leq 1$).

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Oblicz granicę
$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x}.$$

Rozwiązanie: $x^{1/x}$ to jest wyrażenie nieoznaczone postaci $\infty^{1/\infty}$ w ∞, a więc musimy je przekształcić. Robimy to tak jak zwykle:
$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\log x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\log x}{x}}.$$
Ponieważ funkcja wykładnicza jest ciągła, więc jeżeli wykładnik ma skończoną granicę g w ∞, to całe wyrażenie ma granicę e^g w ∞. Liczymy więc granicę wykładnika. To jest wyrażenie nieoznaczone postaci ∞/∞ w ∞, a więc stosujemy regułę de l'Hôpitala:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} \stackrel{\text{de l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$
Więc
$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = e^0 = 1.$$