Pierwsza litera nazwiska

Egzamin 2 termin
20.02.14

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz pole obszaru (nieograniczonego) zawartego pomiędzy wykresem funkcji $f(x) = x\, e^{-x^2}$ oraz dodatnią półosią poziomą.

Rozwiązanie: Jak wiemy to pole jest równe całce niewłaściwej

$$\int_0^\infty x\, e^{-x^2}\, dx.$$

Policzymy tą całkę. Weźmy dowolne $M > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^M x\, e^{-x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} t = x^2 \\ \frac{dt}{2} = x dx \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} \int_0^{M^2} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{2}\big(-e^{-t}\big)\Big|_0^{M^2} \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 - e^{-M^2}\Big) \\ &\stackrel{M\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Udowodnij następujący fakt: jeżeli $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ oraz $b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g$, gdzie $g > 0$, to także $a_n \cdot b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Rozwiązanie: Intuicyjnie widzimy to następująco. Wyrazy a_n są duże od pewnego miejsca, natomiast b_n są oddzielone od zera od pewnego miejsca. Iloczyn może więc być dowolnie duży od pewnego miejsca. A teraz przeprowadzimy formalne rachunki. Mamy pokazać, że

$$\forall\ M \quad \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \geq n_0 \quad a_n\, b_n > M.$$

Wiemy, że

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \geq n_1 \quad |b_n - g| < \epsilon \ \Rightarrow\ b_n > g - \epsilon.$$

Weźmy $\epsilon = g/2$ i mamy, dla $n \geq n_1$ $b_n > g - g/2 = g/2 > 0$.

Z drugiej strony wiemy, że

$$\forall\ N \quad \exists\ n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall\ n \geq n_2 \quad a_n > N.$$

Jeżeli $M > 0$ to niech $N = 2M/g$, oraz $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Wtedy dla $n \geq n_0$ $a_n > 2M/g$, $b_n > g/2 \ \Rightarrow\ a_n b_n > M$. (Pomnożyliśmy stronami nierówności co jest możliwe, gdyż wszystkie „strony” są dodatnie.)

Jeżeli $M \leq 0$ to jest prościej, bierzemy $N = 0$, $\epsilon = g$ i $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Dla $n \geq n_0$ mamy $a_n > 0$ i $b_n > 0 \ \Rightarrow\ a_n b_n > 0 \geq M$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz pole figury ograniczonej wykresem funkcji $f(x) = \sin(x)$ oraz prostą $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dla $0 \leq x \leq \pi$.

Rozwiązanie: Na odcinku $[0, \pi]$ $\sin x$ jest powyżej $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dla $\pi/4 \leq x \leq 3\pi/4$. Rozważana figura jest więc dana przez $\{(x, y) : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq \sin x, \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}\}$. Pole tej figury to różnica całek:

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x \, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \, dx &= -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \Big) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{4 - \pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz całkę

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez podstawienie:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx &= \left\{\begin{matrix} {\scriptstyle t=\sqrt{x}} \\ {\scriptstyle dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx} \\ 2tdt = dx \end{matrix}\right\} = 2\int_0^1 \frac{t^2}{t+1}\,dt \\
&= \left\{\begin{matrix} s = t+1 \\ ds = dt \end{matrix}\right\} = 2\int_1^2 \frac{(s-1)^2}{s}\,ds \\
&= 2\int_1^2 \frac{s^2-2s+1}{s}\,ds \\
&= 2\int_1^2 \big(s-2+\frac{1}{s}\big)\,ds \\
&= 2\Big(\frac{s^2}{2}-2s+\log s\Big)\Big|_1^2 \\
&= 2\Big(\frac{4}{2}-4+\log 2\Big) - 2\Big(\frac{1}{2}-2+0\Big) \\
&= 4-8+2\log 2-1+4 \\
&= 2\log 2-1 \\
&= \log\frac{4}{e}.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz całkę

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\, \sin x \, dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez części:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x\, \sin x \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} x\, (-\cos x)' \, dx \\ &= -x\, \cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx \\ &= -\pi(-1) + (-\pi)(-1) + \sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz długość krzywej danej równaniem $y^2 = x^3$ pomiędzy punktami $(0,0)$ i $(4,8)$.

Rozwiązanie: Dla tej krzywej $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$, więc fragment łuku pomiędzy $(0,0$ i $(4,8)$ to wykres funkcji $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Wiemy, że długość tego łuku to

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Policzmy. $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, więc

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx \\
&= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx \\
&= \left\{ \begin{array}{c} t = 1 + \frac{9}{4}x \\ \frac{4}{9}dt = dx \end{array} \right\} = \frac{4}{9}\int_1^{10} \sqrt{t}\, dt \\
&= \frac{8}{27}\, t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{10} \\
&= \frac{8}{27}\left(\sqrt{10}^3 - 1\right) \\
&= \frac{8}{27}(\sqrt{1000} - 1).
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz granicę ($\cot x$ to kotangens x):

$$\lim_{x\to 0} \arcsin x \cot x.$$

Rozwiązanie: Jest to wyrażenie nieoznaczone typu $0(\pm\infty)$. Przekształćmy to do postaci $\frac{0}{0}$ i zastosujmy regułę de l'Hospitala.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \arcsin x \cot x &= \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\tan x} \\ &\overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} \\ &= 1.\end{aligned}$$