

Pierwsza litera nazwiska

Egzamin 2 termin
20.02.14

Nazwisko i imię:

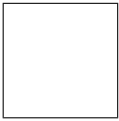
Zadanie 1. Oblicz pole obszaru (nieograniczonego) zawartego pomiędzy wykresem funkcji $f(x) = x e^{-x^2}$ oraz dodatnią półosią poziomą.

Rozwiązanie: Jak wiemy to pole jest równe całce niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx.$$

Policzymy tą całkę. Weźmy dowolne $M > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^M x e^{-x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ \frac{dt}{2} = x dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^{M^2} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{2} (-e^{-t}) \Big|_0^{M^2} \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-M^2}) \\ &\xrightarrow{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Udowodnij następujący fakt: jeżeli $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ oraz $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$, gdzie $g > 0$, to także $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

Rozwiązanie: Intuicyjnie widzimy to następująco. Wyrazy a_n są duże od pewnego miejsca, natomiast b_n są oddzielone od zera od pewnego miejsca. Iloczyn może więc być dowolnie duży od pewnego miejsca. A teraz przeprowadzimy formalne rachunki. Mamy pokazać, że

$$\forall M \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n b_n > M.$$

Wiemy, że

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_1 \quad |b_n - g| < \epsilon \Rightarrow b_n > g - \epsilon.$$

Weźmy $\epsilon = g/2$ i mamy, dla $n \geq n_1$ $b_n > g - g/2 = g/2 > 0$.

Z drugiej strony wiemy, że

$$\forall N \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_2 \quad a_n > N.$$

Jeżeli $M > 0$ to niech $N = 2M/g$, oraz $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Wtedy dla $n \geq n_0$ $a_n > 2M/g$, $b_n > g/2 \Rightarrow a_n b_n > M$. (Pomnożyliśmy stronami nierówność co jest możliwe, gdyż wszystkie „strony” są dodatnie.)

Jeżeli $M \leq 0$ to jest prościej, bierzemy $N = 0$, $\epsilon = g$ i $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Dla $n \geq n_0$ mamy $a_n > 0$ i $b_n > 0 \Rightarrow a_n b_n > 0 \geq M$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz pole figury ograniczonej wykresem funkcji $f(x) = \sin(x)$ oraz prostą $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dla $0 \leq x \leq \pi$.

Rozwiązanie: Na odcinku $[0, \pi]$ $\sin x$ jest powyżej $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dla $\pi/4 \leq x \leq 3\pi/4$. Rozważana figura jest więc dana przez $\{(x, y) : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq \sin x, \pi/4 \leq x \leq 3\pi/4\}$. Pole tej figury to różnica całek:

$$\begin{aligned} & \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin x \, dx - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \, dx = -\cos x \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} - \frac{1}{\sqrt{2}} x \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{4 - \pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

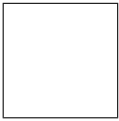
Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz całkę

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez podstawienie:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ 2t dt = dx \end{array} \right\} = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} s = t + 1 \\ ds = dt \end{array} \right\} = 2 \int_1^2 \frac{(s-1)^2}{s} ds \\ &= 2 \int_1^2 \frac{s^2 - 2s + 1}{s} ds \\ &= 2 \int_1^2 \left(s - 2 + \frac{1}{s} \right) ds \\ &= 2 \left(\frac{s^2}{2} - 2s + \log s \right) \Big|_1^2 \\ &= 2 \left(\frac{4}{2} - 4 + \log 2 \right) - 2 \left(\frac{1}{2} - 2 + 0 \right) \\ &= 4 - 8 + 2 \log 2 - 1 + 4 \\ &= 2 \log 2 - 1 \\ &= \log \frac{4}{e}. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz całkę

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \, dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} x (-\cos x)' \, dx \\ &= -x \cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx \\ &= -\pi(-1) + (-\pi)(-1) + \sin x \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

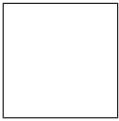
Zadanie 6. Oblicz długość krzywej danej równaniem $y^2 = x^3$ pomiędzy punktami $(0, 0)$ i $(4, 8)$.

Rozwiązanie: Dla tej krzywej $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$, więc fragment łuku pomiędzy $(0, 0)$ i $(4, 8)$ to wykres funkcji $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Wiemy, że długość tego łuku to

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Policzmy. $f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$, więc

$$\begin{aligned} L &= \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx \\ &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = 1 + \frac{9}{4}x \\ \frac{4}{9}dt = dx \end{array} \right\} = \frac{4}{9} \int_1^{10} \sqrt{t} dt \\ &= \frac{8}{27} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{10} \\ &= \frac{8}{27} (\sqrt{10^3} - 1) \\ &= \frac{8}{27} (\sqrt{1000} - 1). \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz granicę ($\cot x$ to kotangens x):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cot x.$$

Rozwiązanie: Jest to wyrażenie nieoznaczone typu $0(\pm\infty)$. Przekształćmy to do postaci $\frac{0}{0}$ i zastosujmy regułę de l'Hospitala.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cot x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\tan x} \\ &\stackrel{\text{de l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} \\ &= 1. \end{aligned}$$