Egzamin końcowy 2 termin

16.02.10

Czas: 90 min

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz granicę ciągu:

$$a_n = \sqrt{3n^2 + 2n - 5} - n\sqrt{3}.$$

Rozwiązanie: Stosujemy stary trick:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{3n^2 + 2n - 5} - n\sqrt{3} \\ &= \frac{(\sqrt{3n^2 + 2n - 5} - n\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3n^2 + 2n - 5} + n\sqrt{3})}{\sqrt{3n^2 + 2n - 5} + n\sqrt{3}} \\ &= \frac{3n^2 + 2n - 5 - 3n^2}{\sqrt{3n^2 + 2n - 5} + n\sqrt{3}} \\ &= \frac{n\left(2 - \frac{5}{n}\right)}{n\left(\sqrt{3 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}} + \sqrt{3}\right)} \\ &\to \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź wartości najmniejszą i największą podanej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = |\cos(x)| + \sin(x), \quad [0, \pi].$$

Rozwiązanie: Wartość najmniejsza i największa przyjęta jest na końcach przedziału (to znaczy w punktach 0 i π), w punktach w których funkcja nie jest różniczkowalna (w tym przypadku to punkt $\frac{\pi}{2}$ w którym cos zmienia znak) lub w punktach w których pochodna jest zerem. Poszukajmy tych punktów. Dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ mamy $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$, czyli

$$f'(x) = -\sin(x) + \cos(x) \Rightarrow f'(x) = 0 \leftrightarrow \cos(x) = \sin(x).$$

Jest dokładnie jeden taki punkt: $x = \frac{\pi}{4}$. Dla $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ mamy $f(x) = -\cos(x) + \sin(x)$, czyli

$$f'(x) = \sin(x) + \cos(x) \Rightarrow f'(x) = 0 \leftrightarrow \cos(x) = -\sin(x).$$

Znowuż jest dokładnie jeden taki punkt: $x = \frac{3\pi}{4}$. Obliczamy

$$f(0) = 1,\ f(\pi) = 1,\ f(\tfrac{\pi}{2}) = 1,\ f(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},\ f(\tfrac{3\pi}{4}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Największa wartość to $\sqrt{2}$ (przyjęta w $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{4}$), a najmniejsza to 1 (przyjęta w 0, $\frac{\pi}{2}$ oraz π).

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Podaj punkty ciągłości i nieciągłości funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & : x < 0 \\ 0 & : x = 0 \\ \tan(x) \cdot \sin(\frac{1}{x}) & : x > 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie: Funkcja jest ciągła na całej swojej dziedzinie (dziedzina to cała prosta bez punktów postaci $k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{N}$) za wyjątkiem, być może, punktu sklejenia $x = 0$. Sprawdźmy ten podejrzany punkt. Dla $x < 0$ mamy $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$, czyli

$$0 \leq |f(x)| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq f(x) \leq |x|.$$

Korzystając z twierdzenia o 3 funkcjach mamy

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0.$$

Dla $x > 0$ mamy $f(x) = \tan(x)\sin(\frac{1}{x})$, czyli

$$0 \leq |f(x)| \leq |\tan(x)| \Rightarrow -|\tan(x)| \leq f(x) \leq |\tan(x)|.$$

Korzystając z twierdzenia o 3 funkcjach, wiedząc, że $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \to 0$ gdy $x \to 0$ mamy

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$

Obie granice jednostronne istnieją i są równe wartości funkcji w punkcie $x = 0$, czyli funkcja jest ciągła w tym punkcie. Wszystkie punkty dziedziny f są więc punktami ciągłości.

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \sqrt{1 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}.$$

Rozwiązanie: Różniczkujemy funkcję złożoną:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan(x + \frac{1}{x})}} \cdot \left(1 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1 + \tan(x + \frac{1}{x})}} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{1}{x}\right)} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1 + \tan(x + \frac{1}{x})}} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{1}{x}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez podstawienie:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx &= \left\{ \begin{array}{c} e^x = t \\ dx = \frac{1}{t} dt \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{t-1}{t+1}\, \frac{1}{t}\, dt \\
&= \int \left(\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t} \right) dt \\
&= \left\{ \begin{array}{c} A + B = 1 \\ B = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A = 2 \\ B = -1 \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{2}{t+1}\, dt - \int \frac{1}{t}\, dt \\
&= 2 \log|t| - \log|t| \\
&= 2 \log(e^x + 1) - \log(e^x) \\
&= 2 \log(e^x + 1) - x + C.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz całkę oznaczoną:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\,\cos(x)\,dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez części:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\,\cos(x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\,\sin'(x)\,dx \\
&= (x+1)\sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\sin(x)\,dx \\
&= \frac{\pi}{2} + 1 + \cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2} + 1 + 0 - 1 \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz długość wykresu funkcji:

$$f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}, \quad 1 \leq x \leq 4.$$

Rozwiązanie: Mamy wzór

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx,$$

oraz $f'(x) = \sqrt{x-1}$. W takim razie

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + (x-1)}\, dx = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} 2^3 = \frac{16}{3}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Sprawdź, że podana całka niewłaściwa jest zbieżna, i oblicz ją:

$$\int_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$$

Rozwiązanie: Niech $M > 1$ i obliczamy

$$\int_1^M \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2}dx \end{array} \right\} = -\int_1^{\frac{1}{M}} e^t\,dt = e^t\Big|_{\frac{1}{M}}^{1} = e - e^{\frac{1}{M}}.$$

Gdy $M \to \infty$ granica powyższego wyrażenia istnieje i jest równa $e-1$. Całka niewłaściwa jest więc zbieżna i równa

$$\int_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = e - 1.$$