Kolokwium 1
5.11.12

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność

$$|2x| + 3 \geq |6 - x|$$

Rozwiązanie: Rozpatrujemy 3 przypadki:

- $x < 0 \Rightarrow 6 - x > 0 \Rightarrow -2x + 3 \geq 6 - x \Leftrightarrow -3 \geq x$.
  W tym przypadku rozwiązanie to: $x \geq -3$
- $0 \leq x < 6 \Rightarrow 6 - x > 0 \Rightarrow 2x + 3 \geq 6 - x \Leftrightarrow 3x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 1$.
  W tym przypadku rozwiązanie to: $1 \leq x < 6$
- $x \geq 6 \Rightarrow 6 - x \leq 0 \Rightarrow 2x + 3 \geq x - 6 \Leftrightarrow x \geq -9$.
  Rozwiązanie: $x \geq 6$.

Ostatecznie rozwiązaniem jest zbiór $\{x : x \leq -3 \vee x \geq 1\}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź kresy zbioru A, i sprawdź, czy zbiór zawiera swoje kresy

$$A = \left\{x^2 - 1; x \in (-1, \tfrac{1}{2}]\right\}.$$

Rozwiązanie: Funkcja $x^2 - 1$ maleje dla $x \leq 0$ i rośnie dla $x \geq 0$. W takim razie

$$\{x^2 - 1 : x \in (-1, 0]\} = [-1, 0), \quad \text{oraz} \quad \{x^2 - 1 : x \in [0, \tfrac{1}{2}]\} = [-1, -\tfrac{3}{4}].$$

Zbiór A jest sumą tych dwóch przedziałów, a więc przedziałem $[-1, 0)$. W takim razie

$$\inf A = -1, \qquad \sup A = 0,$$

przy czym $\inf A \in A$ oraz $\sup A \notin A$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź oba pierwiastki stopnia 2 liczby zespolonej $-i$.

Rozwiązanie: Znajdźmy postać trygonometryczną liczby $-i$:

$$-i = \cos\varphi + i\,\sin\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

W takim razie pierwiastki to:

$$z_1 = \cos\tfrac{\varphi}{2} + i\,\sin\tfrac{\varphi}{2} = \cos\tfrac{3\pi}{4} + i\,\sin\tfrac{3\pi}{4} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\,\tfrac{1}{\sqrt{2}},$$
$$z_2 = \cos\tfrac{\varphi+2\pi}{2} + i\,\sin\tfrac{\varphi+2\pi}{2} = \cos\tfrac{7\pi}{4} + i\,\sin\tfrac{7\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} - i\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź granicę ciągu

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{4^n}{2^n + 3^n}}.$$

Rozwiązanie: Mamy następujące oszacowania:

$$\frac{4^n}{2 \cdot 3^n} \le \frac{4^n}{2^n + 3^n} \le \frac{4^n}{3^n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{4^n}{2 \cdot 3^n}} \le a_n \le \sqrt[n]{\frac{4^n}{3^n}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\,\frac{4}{3} \le a_n \le \frac{4}{3}.$$

Skoro

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\tfrac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} = 1,$$

więc oba skrajne ciągi mają wspólną granicę $\frac{4}{3}$. A więc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Pokaż, że następujący ciąg jest rosnący i ograniczony

$$a_n = \frac{n-3}{2n+5}.$$

Rozwiązanie: Sprawdźmy:

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} \\ \frac{n-3}{2n+5} &\leq \frac{n+1-3}{2(n+1)+5} \\ \frac{n-3}{2n+5} &\leq \frac{n-2}{2n+7} \\ (n-3)(2n+7) &\leq (n-2)(2n+5) \\ 2n^2+n-21 &\leq 2n^2+n-10 \\ -21 &\leq -10. \end{aligned}$$

A więc rzeczywiście, ciąg jest rosnący. Pokażemy, że $a_n \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} a_n &\leq \frac{1}{2} \\ \frac{n-3}{2n+5} &\leq \frac{1}{2} \\ 2n-6 &\leq 2n+5 \\ -6 &\leq 5. \end{aligned}$$

Ciąg jest więc ograniczony od góry, a jako rosnący jest też automatycznie ograniczony od dołu.

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź granicę ciągu ($[\cdot]$ to część całkowita, a x to pewna liczba rzeczywista)

$$a_n = \frac{[2^n x]}{2^{n-1}}.$$

Rozwiązanie: Z własności części całkowitej

$$\begin{gathered} 2^n x - 1 < [2^n x] \leq 2^n x \\ \frac{2^n x - 1}{2^{n-1}} < a_n \leq \frac{2^n x}{2^{n-1}} \\ 2x - 2^{1-n} < a_n \leq 2x. \end{gathered}$$

Ponieważ $2^{1-n} = \frac{2}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, więc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2x.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Funkcja f dana jest wzorem

$$f(x) = x^2 - 4x + 2, \qquad D_f = (-\infty, -2].$$

Podaj wzór na funkcję odwrotną do f i podaj jej dziedzinę.

Rozwiązanie: Mamy

$$f(x) = (x-2)^2 - 2,$$

więc gdy x przebiega zakres $(-\infty, -2]$ to $(x-2)$ przebiega zakres $(-\infty, -4]$, a więc $(x-2)^2$ przebiega zakres $[16, \infty)$, a więc zbiór wartości f to $[14, \infty)$. Żeby znaleźć wzór na funkcję odwrotną rozwiązujemy równanie, ze względu na x, dla $y \in [14, \infty)$:

$$\begin{aligned} y &= (x-2)^2 - 2 \\ y + 2 &= (x-2)^2 \\ \sqrt{y+2} &= \pm(x-2) \\ x &= 2 \pm \sqrt{y+2}. \end{aligned}$$

Musimy wybrać znak po prawej stronie, a ponieważ wartości x muszą wpadać do dziedziny f czyli $(-\infty, -2]$, więc musimy wybrać znak $-$.

$$x = 2 - \sqrt{y+2}.$$

Mamy więc $f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{y+2}$. Dziedziną funkcji odwrotnej jest obraz f czyli $[14, \infty)$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Oblicz granicę ciągu

$$a_n = \frac{1 + \sin^2(n!)}{\sqrt{n}}.$$

Rozwiązanie: Mamy oszacowania:

$$0 \le \sin^2(n!) \le 1$$
$$1 \le 1 + \sin^2(n!) \le 2$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \le a_n \le \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Ponieważ oba skrajne ciągi mają wspólną granicę 0, więc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$