Kolokwium 1
8.11.13

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność

$$\Big| |x+1| - |x-1| \Big| < 1$$

Rozwiązanie: Rozpatrujemy 3 przypadki: $x < -1$, $-1 \leq x \leq 1$ i $1 < x$:

$x < -1 \ \Rightarrow\ |-x-1-(-x+1)| < 1 \ \Leftrightarrow\ |-2| < 1 \ \Rightarrow$ brak rozwiązań.
$-1 \leq x \leq 1 \ \Rightarrow\ |x+1-(-x+1)| < 1 \ \Leftrightarrow\ |2x| < 1 \ \Leftrightarrow\ |x|, \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
$1 < x \ \Rightarrow\ |x+1-(x-1)| < 1 \ \Leftrightarrow\ |2| < 1 \ \Rightarrow$ brak rozwiązań.

Rozwiązaniem jest więc przedział $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (bez końców).

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź wszystkie pierwiastki zespolone: $\sqrt[3]{-2+2\,i}$.

Rozwiązanie: Liczbę $-2+2\,i$ zapisujemy w postaci trygonometrycznej:

$$-2+2\,i=\sqrt{8}\Big(-\frac{2}{\sqrt{8}}+\frac{2}{\sqrt{8}}\,i\Big)=2\sqrt{2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,i\Big)=2\sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\sin\frac{3\pi}{4}\Big).$$

Pierwiastki będą więc miały moduł $\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$ i argumenty: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}$:

$$w_1=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\sin\frac{\pi}{4}\Big)=\sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)=1+i,$$

$$w_2=\sqrt{2}\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\Big)+i\,\sin\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\Big)\Big)=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{11\pi}{12}+i\,\sin\frac{11\pi}{12}\Big),$$

$$w_3=\sqrt{2}\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\Big)+i\,\sin\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\Big)\Big)=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{19\pi}{12}+i\,\sin\frac{19\pi}{12}\Big).$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź funkcję odwrotną (wraz z jej dziedziną) do:

$$f(x) = x^2 - 2x + 2, \qquad x \geq 1.$$

Rozwiązanie: $f(x) = (x-1)^2 + 1$, a więc zbiorem wartości f są wszystkie liczby rzeczywiste ≥ 1. Rozwiązujemy ze względu na y ($y \geq 1$):

$$\begin{aligned} & y = x^2 - 2x + 2 \\ & x^2 - 2x + 2 - y = 0 \\ & \Delta = 4 - 4(2-y) = 4y - 4 \\ & x = \frac{2 \pm 2\sqrt{y-1}}{2} = 1 \pm \sqrt{y-1}. \end{aligned}$$

Ponieważ zbiorem wartości funkcji odwrotnej ma być zbiór $x \geq 1$, więc funkcją odwrotną jest $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-1}$, z dziedziną $\{x \geq 1\}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź granicę ciągu:

$$a_n = \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)} = \frac{n^3\left(2-\frac{1}{n}\right)^3}{n^2\left(4-\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n\left(\frac{1}{n}-5\right)} \\ &= \frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^3}{\left(4-\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}-5\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2^3}{4^2(-5)} = \frac{-1}{10}. \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź granicę ciągu:

$$a_n = \frac{\sqrt[4]{n^3+2n^2-n+2}}{2\left(\sqrt[4]{n+1}\right)^3+\sqrt{n+2}}.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt[4]{n^3+2n^2-n+2}}{2\left(\sqrt[4]{n+1}\right)^3+\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt[4]{n^3\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}}{2\sqrt[4]{n}^3\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right)^3+\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \\ &= \frac{n^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}}{2n^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right)^3+n^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = \frac{\sqrt[4]{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}}{2\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right)^3+n^{-\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt[4]{1}}{2\sqrt[4]{1}^3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź granicę ciągu:

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{8}{5}\right)^n}}{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}}.$$

Rozwiązanie: Skorzystamy z twierdzenia o 3 ciągach. W tym celu a_n oszacujemy od góry i od dołu. Szacujemy od góry zastępując licznik czymś większym, a mianownik czymś mniejszym, a od dołu odwrotnie, licznik czymś mniejszym a mianownik czymś większym (zauważmy, że $\frac{2}{3} < \frac{8}{5}$):

$$\frac{\sqrt[n]{\left(\frac{8}{5}\right)^n}}{\sqrt[n]{2}} \leq a_n \leq \frac{\sqrt[n]{2 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^n}}{\sqrt[n]{1}}$$

$$\frac{\frac{8}{5}}{\sqrt[n]{2}} \leq a_n \leq \frac{\sqrt[n]{2} \cdot \frac{8}{5}}{1}.$$

Ponieważ $\sqrt[n]{2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, więc ciągi po obu stronach mają wspólną granicę $\frac{8}{5}$. Z twierdzenia o 3 ciągach mamy więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{8}{5}\right)^n}}{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}} = \frac{8}{5}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Znajdź granicę (być może niewłaściwą) ciągu:

$$a_n = n^2 - n$$

Rozwiązanie: Przypuszczamy, że ciąg ma granicę niewłaściwą $+\infty$. Mamy więc pokazać, że dla każdego M istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq n_0$ mamy $a_n > M$. Jak zwykle, rozwiązujemy mocniejszą, ale prostszą nierówność. W tym celu zauważamy, że $a_n \geq n$ (dla $n \geq 2$). Wystarczy więc zagwarantować $n > M$. Ale to jest proste: jeżeli $n_0 = [M]+1$ to mamy potrzebną nierówność dla $n \geq n_0$. Wybieramy n_0 jako największą z liczb, które spełniają wszystkie wymagania: $n_0 = \max\{2, [M]+1\}$. Udowodniliśmy więc, że

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - n = +\infty.$$