Pierwsza litera nazwiska

1

Kolokwium 1
6.11.15

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Znajdź granicę, być może niewłaściwą, ciągu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{(n+\sin n)^2}.$$

Rozwiązanie: Wiemy, że $-1 \leq \sin n \leq 1$, więc

$$n-1 \leq n+\sin n \leq n+1,$$

więc, dla $n \geq 2$

$$\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2} \leq \frac{n^2+n+1}{(n+\sin n)^2} \leq \frac{n^2+n+1}{(n-1)^2} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}.$$

Korzystając z 3 ciągów

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{(n+\sin n)^2} = 1.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź granicę, być może niewłaściwą, ciągu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n}\,\sqrt[n]{3^2 + 1}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z 3 ciągów:

$$\sqrt[n]{3^n}\,\sqrt[n]{10} \leq \sqrt[n]{3^n + 2^n}\,\sqrt[n]{3^2 + 1} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n}\,\sqrt[n]{10}$$

$$3 \cdot \sqrt[n]{10} \leq \sqrt[n]{3^n + 2^n}\,\sqrt[n]{3^2 + 1} \leq 3 \cdot \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{10}.$$

Wiemy, że $\sqrt[n]{a} \to 1\ \forall\, a > 0$, więc z 3 ciągów

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n}\,\sqrt[n]{3^2 + 1} = 3.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź granicę, być może niewłaściwą, ciągu

$$\lim_{n\to\infty}(3n - \sqrt{9n^2+6n-15}).$$

Rozwiązanie: Uzupełniamy do wzoru skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned}
3n - \sqrt{9n^2+6n-15} &= \frac{(3n - \sqrt{9n^2+6n-15})(3n + \sqrt{9n^2+6n-15})}{3n + \sqrt{9n^2+6n-15}} \\
&= \frac{9\,n^2 - 9\,n^2 - 6\,n + 15}{3n + \sqrt{9n^2+6n-15}} \\
&= \frac{-6\,n + 15}{3n + \sqrt{9n^2+6n-15}} \\
&= \frac{-6 + \frac{15}{n}}{3 + \sqrt{9 + \frac{6}{n} - \frac{15}{n^2}}}.
\end{aligned}$$

Tak więc

$$\lim_{n\to\infty}(3n - \sqrt{9n^2+6n-15}) = -\frac{6}{6} = -1.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Udowodnij, że jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = q < 1,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Rozwiązanie: Wiemy, że $q < 1$, wybierzmy takie $\epsilon > 0$, żeby $q + \epsilon < 1$ (innymi słowy $\epsilon < 1 - q$). Skoro $\sqrt[n]{|u_n|} \to q$, więc

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_0 \quad |\sqrt[n]{|u_n|} - q| < \epsilon \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{|u_n|} < q + \epsilon.$$

Mamy więc, dla $n \geq n_0$

$$0 \leq \sqrt[n]{|u_n|} < q + \epsilon$$
$$0 \leq |u_n| < (q + \epsilon)^n.$$

Korzystając z 3 ciągów, pamiętając, że $0 < q + \epsilon < 1$, mamy $|u_n| \to 0$, a więc $u_n \to 0$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Rozwiąż nierówność

$$1 < \frac{2x^2 - 7x - 29}{x^2 - 2x - 15} < 2.$$

Rozwiązanie: Mamy $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$, więc dziedziną tej nierówności jest cała prosta bez -3 i bez 5. Rozważamy 2 przypadki (różny znak mianownika):
1. $x < -3 \vee x > 5$ (mianownik dodatni). Nasz podwójna nierówność w tym przypadku jest równoważna:

$$x^2 - 2x - 15 < 2x^2 - 7x - 29 < 2x^2 - 4x - 30.$$

Lewa nierówność to

$$x^2 - 5x - 14 > 0$$
$$(x-7)(x+2) > 0$$
$$x \in (-\infty, -2) \cup (7, \infty).$$

Prawa nierówność to

$$3x - 1 > 0$$
$$x > \frac{1}{3}.$$

Łącząc te 2 warunki, w tym przypadku otrzymujemy rozwiązanie: $x > 7$.
2. $-3 < x < 5$ (mianownik ujemny). Nasz podwójna nierówność w tym przypadku jest równoważna:

$$x^2 - 2x - 15 > 2x^2 - 7x - 29 > 2x^2 - 4x - 30.$$

Tak jak poprzednio, lewa nierówność to

$$x^2 - 5x - 14 < 0$$
$$(x-7)(x+2) < 0$$
$$x \in (-2, 7).$$

Prawa nierówność to

$$3x - 1 < 0$$
$$x < \frac{1}{3}.$$

Łącząc te 2 warunki, w tym przypadku otrzymujemy rozwiązanie: $-2 < x < \frac{1}{3}$. Ostatecznym rozwiązaniem jest połączenie dwóch częściowych rozwiązań: $(-2, \frac{1}{3}) \cup (7, \infty)$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź wszystkie zespolone pierwiastki

$$\sqrt[6]{64}.$$

Rozwiązanie: Zapisujemy 64 jako liczbę zespoloną w postaci trygonometrycznej:

$$64 = 64\,(\cos 0 + \mathbf{i}\,\sin 0).$$

Wypisujemy kolejno pierwiastki, zgodnie ze wzorem z wykładu ($64 = 2^6$):

$$\sqrt[6]{64} = 2\,(\cos 0 + \mathbf{i}\,\sin 0) = 2$$

$$\sqrt[6]{64} = 2\left(\cos\frac{2\,\pi}{6} + \mathbf{i}\,\sin\frac{2\,\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}\,\mathbf{i}$$

$$\sqrt[6]{64} = 2\left(\cos\frac{4\,\pi}{6} + \mathbf{i}\,\sin\frac{4\,\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}\,\mathbf{i}$$

$$\sqrt[6]{64} = 2\left(\cos\frac{6\,\pi}{6} + \mathbf{i}\,\sin\frac{6\,\pi}{6}\right) = 2\,(-1 + \mathbf{i}0) = -2$$

$$\sqrt[6]{64} = 2\left(\cos\frac{8\,\pi}{6} + \mathbf{i}\,\sin\frac{8\,\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}\,\mathbf{i}$$

$$\sqrt[6]{64} = 2\left(\cos\frac{10\,\pi}{6} + \mathbf{i}\,\sin\frac{10\,\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}\,\mathbf{i}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Znajdź dziedzinę funkcji złożonej $g \circ f$ i znajdź funkcję odwrotną do niej (wraz z dziedziną):

$$g(y) = \frac{2y}{1+y^2}, \quad D_g = \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2^x, \quad D_f = [0, \infty).$$

Jeżeli funkcja odwrotna nie istnieje, to uzasadnij.

Rozwiązanie: Dziedziną f jest $[0, \infty)$, a dziedziną g jest cała prosta, więc dziedziną $g \circ f$ jest $D_f = [0, \infty)$. Żeby znaleźć funkcję odwrotną do $g \circ f$ musimy rozwiązać równanie (ze względu na x):

$$y = (g \circ f)(x) = \frac{2 \cdot 2^x}{1 + \left(2^x\right)^2}$$

$$y + \left(2^x\right)^2 y = 2 \cdot 2^x$$

$$\left(2^x\right)^2 y - 2^x \cdot 2 + y = 0.$$

Oznaczmy na moment $t = 2^x$, i to jest równanie kwadratowe:

$$y \cdot t^2 - 2 \cdot t + y = 0.$$

Mamy $\Delta = 4 - 4\,y^2$, więc

$$2^x = t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\,y^2}}{2\,y} = \frac{1}{y} \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}.$$

Po pierwsze, nie martwmy się istnieniem pierwiastka. Jeżeli $y^2 > 1$ to rozwiązanie naszego równania nie istnieje, a to znaczy, że takie y leży poza obrazem funkcji, w więc poza dziedziną funkcji odwrotnej. Czyli interesują nas tylko te y, dla których rozwiązanie istnieje, czyli $y \in [-1, 1]$. Ważniejsza kwestia to wybór znaku przed pierwiastkiem. Zauważmy, że

$$\sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} < \left|\frac{1}{y}\right|,$$

więc niezależnie od wyboru znaku przed pierwiastkiem, znak rozwiązania t będzie taki sam, jak znak y. Nas oczywiście interesuje $t > 0$, (bo $t = 2^x$), więc $y > 0$. W tym przypadku wybór $+$ oznacza, że $t \geq 1$, a wybór $-$ oznacza $t \leq 1$ (łatwo to sprawdzić). Zauważmy, że $t = 2^x \geq 1$ (ze względu na dziedzinę $D_f = [0, \infty)$), czyli wybieramy $+$. Mamy więc

$$2^x = \frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} \quad \Longrightarrow \quad x = \log_2\left(\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}\right).$$

Ostatecznie (dla porządku zmieniamy znaczenie literek)

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right), \qquad D_{(g \circ f)^{-1}} = (0, 1].$$