Kolokwium 2
10.12.10

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Znajdź promień zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{4n}{2n} x^n$$

Rozwiązanie: Możemy skorzystać z kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{\binom{4(n+1)}{2(n+1)} x^{n+1}}{\binom{4n}{2n} x^n}\right| \\
&= \frac{(4n+4)!|x|^{n+1}(2n)!(2n)!}{(4n)!(2n+2)!(2n+2)!|x|^n} \\
&= |x| \, \frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}{(2n+1)(2n+2)(2n+1)(2n+2)} \\
&= |x| \, \frac{4^4\left(n+\frac{1}{4}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{4}\right)\left(n+1\right)}{2^4\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+1\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+1\right)} \\
&= 16\,|x| \, \frac{\left(n+\frac{1}{4}\right)\left(n+\frac{3}{4}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+1\right)} \\
&= 16\,|x| \, \frac{\left(1+\frac{1}{4n}\right)\left(1+\frac{3}{4n}\right)}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 16 \cdot |x|.
\end{aligned}$$

Widzimy więc, że $R = \frac{1}{16}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź parametry a i b dla których podana funkcja jest ciągła:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & : \ x < 1 \\ x^2 + ax + b & : \ 1 \leq x < 2 \\ 2x + 3 & : \ 2 \leq x. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Obliczamy i porównujemy granice jednostronne punktach „sklejenia":

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 4 = 4 \\
&\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 + ax + b = 1 + a + b = f(1) \\
&\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 + ax + b = 4 + 2a + b \\
&\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2x + 3 = 4 + 3 = 7 = f(2)
\end{aligned}$$

f jest więc ciągła w 1 i 2 dokładnie wtedy, gdy

$$\begin{cases} a + b + 1 & = 4 \\ 2a + b + 4 & = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b & = 3 \\ 2a + b & = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & = 0 \\ b & = 3. \end{cases}$$

Oczywiście, we wszystkich innych punktach, poza dwoma powyższymi punktami „sklejenia" funkcja jest ciągła niezależnie od a i b.

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz pochodną następującej funkcji. Podaj w jakim zbiorze istnieje pochodna:

$$f(x) = \frac{x^2(x+1)}{\cos(x)}$$

Rozwiązanie: Mamy $f(x) = \frac{x^3+x^2}{\cos x}$, a więc

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2x)\cos x - (x^3+x^2)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

Pochodna istnieje we wszystkich punktach dziedziny, czyli we wszystkich punktach w których cos nie jest zerem.

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$$

Rozwiązanie: Nie możemy wprost rozdzielić granicy na różnicę granic (bo dwie składowe granice nie istnieją), więc liczymy:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right) &= \lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)}\right)\\
&= \lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1-3}{(x+1)(x^2-x+1)}\\
&= \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}\\
&= \lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}\\
&= \frac{-1-2}{(-1)^2-(-1)+1}\\
&= \frac{-3}{3}\\
&= -1.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}}.$$

Rozwiązanie: Mamy $2n \leq 2n^2$ oraz $3 \leq 3n^2$, a więc

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+2n^2+3n^2}} = \frac{1}{n\sqrt{6}}.$$

Szereg o wyrazach $\frac{1}{n}$ jest rozbieżny (jest to szereg harmoniczny), a więc także szereg o wyrazach $\frac{1}{n\sqrt{6}}$, a więc z kryterium porównawczego szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}}.$$

jest rozbieżny.

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Cz następujący szereg jest zbieżny oraz czy jest zbieżny absolutnie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^6}{3^n}$$

Rozwiązanie: Sprawdzamy zbieżność absolutną korzystając z kryterium d'Alemberta:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^6 3^n}{(-1)^n n^6 3^{n+1}}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^6 \frac{1}{3} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^6 \frac{1}{3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}.$$

Szereg jest więc absolutnie zbieżny, w szczególności jest więc zbieżny.

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Znajdź granicę:

$$\lim_{x\to -1/2} \frac{8x^3+1}{6x^2+5x+1}$$

Rozwiązanie: Mianownik ma granicę 0, nie możemy więc wprost skorzystać z twierdzenia o granicy ilorazu. Staramy się skrócić wspólny czynnik.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{8x^3+1}{6x^2+5x+1} &= \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)(4x^2-2x+1)}{(2x+1)(3x+1)} \\
&= \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{4x^2-2x+1}{3x+1} \\
&= \frac{4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{3\left(-\frac{1}{2}\right)+1} \\
&= \frac{1+1+1}{-\frac{3}{2}+1} \\
&= \frac{3}{-\frac{1}{2}} \\
&= -6.
\end{aligned}$$

Można było też zastosować regułę de l'Hôpitala.

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz jej punkty ciągłości i nieciągłości:

$$f(x) = \frac{1}{\{x\}}$$

Rozwiązanie: Dziedziną f są wszystkie liczby których część ułamkowa jest różna od 0, a więc wszystkie liczby niecałkowite. Funkcja $\{x\}$ jest okresowa o okresie 1, a więc także f jest okresowa o okresie 1: $f(x+1) = f(x)$. Wystarczy więc zbadać własności f na przedziale (01) (czyli na jednym okresie).

$$0 < x < 1 \;\Rightarrow\; \{x\} = x - [x] = x \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{1}{x}.$$

f jest więc ciągła we wszystkich punktach $x \in (0,1)$. Ponieważ jest okresowa, to jest ciągła we wszystkich punktach swojej dziedziny.