Kolokwium 2
9.12.11

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Prosta $y = x$ jest styczna do krzywej $y = x^3 + ax^2 + b$ w punkcie $(2, 2)$. Znajdź a i b.
Rozwiązanie: Wiemy, że w punkcie styczności wartości oraz pochodne obu funkcji muszą być takie same, a więc, po obliczeniu pochodnych, mamy dwa równania:

$$2^3 + 2^2\,a + b = 2,$$
$$3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot a = 1.$$

Otrzymaliśmy układ równań

$$4\,a + b = -6,$$
$$4\,a = -11.$$

Jak łatwo sprawdzić rozwiązaniem tego układu są liczby $a = -\frac{11}{4}$ oraz $b = 5$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź wartości największą i najmniejszą podanej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = |x^2 - 1| - 3\,x, \qquad x \in [-2, 2].$$

Rozwiązanie: Funkcja f jest różniczkowalna wszędzie poza punktami gdzie $x^2 = 1$ czyli poza $x = \pm 1$. Wartości największą oraz najmniejszą przyjmie więc na końcach przedziału ($x = \pm 2$), w punktach nieróżniczkowalności ($x = \pm 1$) lub w ewentualnych zerach pochodnej. Musimy znaleźć zera pochodnej. W przypadku $x^2 > 1$, czyli $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$ mamy

$$f(x) = x^2 - 1 - 3x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2\,x - 3.$$

W takim razie $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2\,x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{3}{2}$. Jest to kolejny punkt do sprawdzenia pod kątem ewentualnej wartości największej lub najmniejszej. W przypadku $x^2 < 1$, czyli $x \in (-1, 1)$ mamy

$$f(x) = -x^2 + 1 - 3x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2\,x - 3.$$

W takim razie $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -2\,x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{3}{2}$. Ten punkt nie leży w rozpatrywanym przedziale, a więc w przedziale $(-1, 1)$ pochodna nie ma zer. Do porównania mamy więc wartości funkcji w punktach ± 2 (końce przedziału), ± 1 (nieróżniczkowalność) oraz $\frac{3}{2}$ (punkt krytyczny).

$$f(-2) = 3 + 6 = 9, \quad f(2) = 3 - 6 = -3, \quad f(-1) = 3,$$
$$f(1) = -3, \quad f(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{9}{4} - 1 - \tfrac{9}{2} = -\tfrac{13}{4} < -3.$$

Widzimy więc, że wartość największa to 9, a wartość najmniejsza to $-\frac{13}{4}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź granicę:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - x}{\sin x - x}.$$

Rozwiązanie: Powyższa granica to wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$, a wiec stosujemy regułę de l'Hôpitala:

$$\frac{(x\cos x - x)'}{(\sin x - x)'} = \frac{\cos x - x\,\sin x - 1}{\cos x - 1}.$$

Jest to znowu wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$, a więc ponownie stosujemy regułę de l'Hôpitala:

$$\frac{(\cos x - x\,\sin x - 1)'}{(\cos x - 1)'} = \frac{-\sin x - \sin x - x\,\cos x}{-\sin x}.$$

Ponownie jest to wyrażenie nieoznaczone, ale nie musimy już stosować reguły. Dzielimy licznik i mianownik przez $-x$ i otrzymujemy

$$\frac{-\sin x - \sin x - x\,\cos x}{-\sin x} = \frac{2\,\frac{\sin x}{x} + \cos x}{\frac{\sin x}{x}}.$$

To ostatnie wyrażenie, gdy $x \to 0$, ma granicę $\frac{2+1}{1} = 3$, czyli ostatecznie

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - x}{\sin x - x} = 3.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Rozstrzygnij, czy podany szereg jest zbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}\,\log(2n)}.$$

Rozwiązanie: Zauważamy, że ciąg $\sqrt{n+2}\log(2n)$ jest dodatni, rosnący i rozbieżny do $+\infty$, a więc ciąg $\frac{1}{\sqrt{n+2}\log(2n)}$ jest dodatni, i malejący do 0. Stosując kryterium Leibniza dla szeregów naprzemiennych otrzymujemy, że szereg jest zbieżny.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Dobierz stałe a, b tak, aby podana funkcja była różniczkowalna w punkcie 1.

$$f(x) = \begin{cases} b\,x + 3 & ; x < 1, \\ 2\,x^2 + x + a & ; x \geq 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Funkcja musi być przede wszystkim ciągła w 1, a więc

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1^2 + 1 + a &= b \cdot 1 + 3 \\ 3 + a &= b + 3 \\ a &= b. \end{aligned}$$

Następnie obliczamy jednostronne granice ilorazów różnicowych w 1:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{b\,(1+h) + 3 - (2+1+a)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{b + b\,h + 3 - 3 - a}{h} = b,$$

gdyż $b - a = 0$.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2(1+h)^2 + (1+h) + a - (2+1+a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{2 + 4\,h + 2\,h^2 + 1 + h + a - 3 - a}{h} = 5.$$

Równość obu granic jednostronnych, a więc istnienie pochodnej w 1, jest więc równoważna warunkowi

$$b = a = 5.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{\sin^3(e^x)}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin^3(e^x)'\, x^{\frac{2}{3}} - \sin^3(e^x)\big(x^{\frac{2}{3}}\big)'}{\big(x^{\frac{2}{3}}\big)^2} \\ &= \frac{3\,\sin^2(e^x)\ \cos(e^x)\, e^x\, x^{\frac{2}{3}} - \sin^3(e^x)\cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} \\ &= \frac{\sin^2(e^x)\Big(3\,\cos(e^x)\, e^x\, x - \frac{2}{3}\sin(e^x)\Big)}{x^{\frac{5}{3}}}. \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Wyznacz promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n\, n!}{(2n)!}\, x^n.$$

Rozwiązanie: Możemy zastosować kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{\dfrac{10^{n+1}\,(n+1)!\,x^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\dfrac{10^n\, n!\, x^n}{(2n)!}}\right| \\
&= \frac{10^{n+1}\,(n+1)!\,|x|^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{10^n\, n!\,|x|^n} \\
&= \frac{10\,(n+1)\,|x|}{(2n+1)(2n+2)} \\
&= \frac{5\,|x|}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Szereg jest zbieżny dla każdego x, a więc promień zbieżności jest nieskończony.

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Wyznacz przedziały wypukłości/wklęsłości oraz punkty przegięcia funkcji:

$$f(x) = x^4 - 2\,x^3 - 12\,x^2 + 4\,x - 2.$$

Rozwiązanie: Obliczamy drugą pochodną: $f''(x) = 4 \cdot 3\,x^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\,x - 12 \cdot 2 = 12\,x^2 - 12\,x - 24 = 12\,(x^2 - x - 2) = 12\,(x-2)\,(x+1)$. Druga pochodna jest więc dodatnia dla $x < -1$ oraz $x > 2$ i ujemna dla $x \in (-1, 2)$. Funkcja jest więc wypukła dla $x < -1$ oraz $x > 2$ oraz ujemna dla $-1 < x < 2$. W punktach $x = -1$ oraz $x = 2$ druga pochodna zmienia znak, a więc funkcja ma punkty przegięcia.