Kolokwium 2
3.12.12

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{2^n}$$

Rozwiązanie: Stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+2)^3}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(n+1)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^3 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Szereg jest więc zbieżny.

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź granicę:

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)\sqrt[4]{1-x}}{x^2-1}.$$

Rozwiązanie: Przekształcamy wyrażenie:

$$\frac{(x+1)\sqrt[4]{1-x}}{x^2-1} = \frac{(x+1)\sqrt[4]{1-x}}{(x-1)(x+1)} = \frac{\sqrt[4]{1-x}}{(x-1)} \stackrel{x\to -1}{\longrightarrow} \frac{\sqrt[4]{2}}{-2}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Zbadaj ciągłość w 0 funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin|x|}{x} & : \ x \neq 0, \\ 1 & : \ x = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Badamy granice jednostronne:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0),$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(-x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1.$$

Funkcja nie jest więc ciągła w 0.

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Zbadaj ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & : \ x < -1 \\ x^3+2x^2-x-2 & : \ -1 \leq x < 2 \\ -x+14 & : \ 2 \leq x. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Sprawdzamy granice jednostronne w punktach sklejenia.

-1:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (-x-1) = 0,$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^3+2x^2-x-2) = 0 = f(-1).$$

Funkcja jest więc ciągła w $x = -1$.
2:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^3+2x^2-x-2) = 12,$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (-x+14) = 12 = f(2).$$

Funkcja jest więc także ciągła w $x = 2$. Ciągłość w pozostałych punktach wynika z ciągłości wielomianów.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź parametry a, b takie, że następująca funkcja jest ciągła:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & : \ x \le -2 \\ ax^2+bx+3 & : \ -2 < x \le 1 \\ x-1 & : \ 1 < x. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Badamy granice jednostronne w punktach sklejenia.

-2:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -2^-} f(x) &= \lim_{x\to -2^-} (2x+5) = 1 = f(-2), \\ \lim_{x\to -2^+} f(x) &= \lim_{x\to -2^+} (ax^2+bx+3) = 4a-2b+3. \end{aligned}$$

Ciągłość w $x=-2$ jest więc równoważna z równaniem:

$$4a-2b+3=1.$$

1:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} (ax^2+bx+3) = a+b+3 = f(1), \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (x-1) = 0. \end{aligned}$$

Ciągłość w $x=1$ jest więc równoważna z kolejnym równaniem:

$$a+b+3=0.$$

Rozwiązując te dwa równania otrzymujemy:

$$a = -\frac{4}{3}, \qquad b = -\frac{5}{3}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Wyznacz promień zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy, na przykład, z kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{2^{n+1}|x|^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{2^n|x|^{n+2}} \\ &= 2|x| \cdot \frac{n}{n+3} \xrightarrow{n\to\infty} 2|x|. \end{aligned}$$

Promień zbieżności jest więc równy $R = \frac{1}{2}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Zbadaj czy następujący szereg jest zbieżny, i czy jest zbieżny absolutnie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że współczynniki

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \frac{1}{(\sqrt[6]{n} - 1)}$$

tworzą ciąg malejący, zbieżny do 0. Korzystając z kryterium Leibniza otrzymujemy, że szereg jest zbieżny. Z drugiej strony

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}},$$

więc korzystając z kryterium porównawczego widzimy, że szereg wartości bezwzględnych nie jest zbieżny. Wyjściowy szereg nie jest więc zbieżny absolutnie.

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Rozstrzygnij zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n/2}{2n^2+3}$$

Rozwiązanie: Pamiętamy, że dla dużych n tylko wyrazy z największą potęgą „się liczą”, Podejrzewamy więc, że szereg jest rozbieżny. Oszacujemy go więc z dołu:

$$\frac{1+\frac{n}{2}}{2n^2+3} \geq \frac{\frac{n}{2}}{2n^2+3} \geq \frac{\frac{n}{2}}{2n^2+3n^2} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{n}.$$

Korzystając z kryterium porównawczego otrzymujemy, że szereg istotnie jest rozbieżny.