Pierwsza litera nazwiska

Kolokwium 2
6.12.13

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} > \frac{1}{2\,n}.$$

Wiemy, że szereg o wyrazach $\frac{1}{n}$ (a więc także szereg o wyrazach $\frac{1}{2n}$) jest rozbieżny, więc korzystając z kryterium porównawczego otrzymujemy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$$

też jest rozbieżny.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$$

Rozwiązanie: To jest szereg naprzemienny, więc spróbujemy zastosować kryterium Leibniza. Wyrazy szeregu zbiegają do zera, więc wystarczy sprawdzić, że ciąg $\frac{\sqrt{n}}{n+100}$ jest malejący:

$$\frac{\sqrt{n}}{n+100} \geq \frac{\sqrt{n+1}}{n+1+100}$$
$$n(n+100+1)^2 \geq (n+1)(n+100)^2$$
$$n((n+100)^2+2(n+100)+1) \geq n(n+100)^2+(n+100)^2$$
$$2n(n+100)+n \geq n(n+100)+100(n+100)$$
$$n(n+100) \geq 99n+10000$$
$$n^2+n \geq 10000$$
$$n(n+1) \geq 100^2.$$

Widać, że jest to równoważne warunkowi $n \geq 100$. Nasz ciąg jest więc najpierw rosnący (do wyrazu o numerze 100), a potem malejący. Możemy więc zastosować kryterium Leibniza do szeregu

$$\sum_{n=100}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}.$$

Zbieżność tego szeregu jest równoważna zbieżności całego szeregu, gdyż różnią się tylko początkiem.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź promień zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n.$$

Rozwiązanie: Ustalamy x i korzystamy z kryterium d'Alemberta:

$$\left| \frac{\left(3^{n+1} + (-2)^{n+1}\right) x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{n}{\left(3^n + (-2)^n\right) x^n} \right| = |x| \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3\,|x|,$$

gdyż $\left(-\frac{2}{3}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Promień zbieżności wynosi więc $\frac{1}{3}$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Udowodnij, że jeżeli istnieje granica funkcji $g = \lim_{x \to x_0} f(x)$ i $g > 0$, to

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D_f \quad 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > 0.$$

Rozwiązanie: Z definicji granicy mamy, że

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D_f \quad 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - g| < \epsilon.$$

Zauważamy, że wystarczy ustalić ϵ wystarczająco małe, żeby $|f(x) - g| < \epsilon \Rightarrow\; f(x) > 0$ (skoro $g > 0$). Na przykład $\epsilon = g$. Mamy wtedy, dla $x \in D_f,\; 0 < |x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - g| < \epsilon \Rightarrow\; |f(x) - g| < g \Rightarrow\; -g < f(x) - g \Rightarrow\; 0 < f(x).$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}.$$

Rozwiązanie: Pomnóżmy licznik i mianownik przez $\sqrt{1+2x}+3$ (stary trick):

$$\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4} = \frac{1+2x-9}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{2x-8}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{2}{\sqrt{1+2x}+3} \xrightarrow{x\to 4} \frac{1}{3}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\,x^2}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z tego, że znamy granicę $\frac{\sin x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\,x^2} = \frac{1}{8}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{8}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{8}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1}{8}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x} + x\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2} + x\sqrt[3]{2x-3}}.$$

Rozwiązanie: Przyglądamy się wyrażeniu uważnie, i zauważamy, że najwyższym wykładnikiem przy x jest $\frac{4}{3}$. Dzielimy więc licznik i mianownik przez $x^{\frac{4}{3}}$.

$$\frac{2\sqrt{x} + x\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2} + x\sqrt[3]{2x-3}} = \frac{2\,x^{\frac{1}{2}-\frac{4}{3}} + 1 + 5\,x^{\frac{1}{5}-\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{2}-\frac{4}{3}}\sqrt{3-\frac{2}{x}} + \sqrt[3]{2-\frac{3}{x}}} = \frac{2\,x^{-\frac{5}{6}} + 1 + 5\,x^{-\frac{17}{15}}}{x^{-\frac{5}{6}}\sqrt{3-\frac{2}{x}} + \sqrt[3]{2-\frac{3}{x}}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$