

Pierwsza litera nazwiska

Kolokwium 2
6.12.13

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}.$$

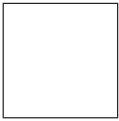
Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} > \frac{1}{2n}.$$

Wiemy, że szereg o wyrazach $\frac{1}{n}$ (a więc także szereg o wyrazach $\frac{1}{2n}$) jest rozbieżny, więc korzystając z kryterium porównawczego otrzymujemy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$$

też jest rozbieżny.



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$$

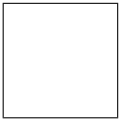
Rozwiązanie: To jest szereg naprzemienny, więc spróbujemy zastosować kryterium Leibniza. Wyrazy szeregu zbiegają do zera, więc wystarczy sprawdzić, że ciąg $\frac{\sqrt{n}}{n+100}$ jest malejący:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}}{n+100} &\geq \frac{\sqrt{n+1}}{n+1+100} \\ n(n+100+1)^2 &\geq (n+1)(n+100)^2 \\ n((n+100)^2 + 2(n+100) + 1) &\geq n(n+100)^2 + (n+100)^2 \\ 2n(n+100) + n &\geq n(n+100) + 100(n+100) \\ n(n+100) &\geq 99n + 10000 \\ n^2 + n &\geq 10000 \\ n(n+1) &\geq 100^2. \end{aligned}$$

Widać, że jest to równoważne warunkowi $n \geq 100$. Nasz ciąg jest więc najpierw rosnący (do wyrazu o numerze 100), a potem malejący. Możemy więc zastosować kryterium Leibniza do szeregu

$$\sum_{n=100}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}.$$

Zbieżność tego szeregu jest równoważna zbieżności całego szeregu, gdyż różnią się tylko początkiem.



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

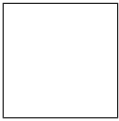
Zadanie 3. Znajdź promień zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n.$$

Rozwiązanie: Ustalamy x i korzystamy z kryterium d'Alemberta:

$$\left| \frac{(3^{n+1} + (-2)^{n+1}) x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{n}{(3^n + (-2)^n) x^n} \right| = |x| \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3|x|,$$

gdyż $\left(-\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Promień zbieżności wynosi więc $\frac{1}{3}$.



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Udowodnij, że jeżeli istnieje granica funkcji $g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ i $g > 0$, to

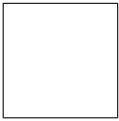
$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > 0.$$

Rozwiązanie: Z definicji granicy mamy, że

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon.$$

Zauważamy, że wystarczy ustalić ϵ wystarczająco małe, żeby $|f(x) - g| < \epsilon \Rightarrow f(x) > 0$ (skoro $g > 0$). Na przykład $\epsilon = g$. Mamy wtedy, dla $x \in D_f$, $0 < |x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - g| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - g| < g \Rightarrow -g < f(x) - g \Rightarrow 0 < f(x).$$



Pierwsza litera nazwiska

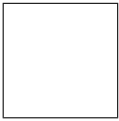
Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{x - 4}.$$

Rozwiązanie: Pomnóżmy licznik i mianownik przez $\sqrt{1+2x} + 3$ (stary trick):

$$\frac{\sqrt{1+2x} - 3}{x - 4} = \frac{1 + 2x - 9}{(x - 4)(\sqrt{1+2x} + 3)} = \frac{2x - 8}{(x - 4)(\sqrt{1+2x} + 3)} = \frac{2}{\sqrt{1+2x} + 3} \xrightarrow{x \rightarrow 4} \frac{1}{3}.$$



Pierwsza litera nazwiska

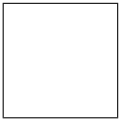
Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2x^2}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z tego, że znamy granicę $\frac{\sin x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2x^2} = \frac{1}{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{8} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{1}{8}.$$



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x} + x\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2} + x\sqrt[3]{2x-3}}.$$

Rozwiązanie: Przyglądamy się wyrażeniu uważnie, i zauważamy, że najwyższym wykładnikiem przy x jest $\frac{4}{3}$. Dzielimy więc licznik i mianownik przez $x^{\frac{4}{3}}$.

$$\frac{2\sqrt{x} + x\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2} + x\sqrt[3]{2x-3}} = \frac{2x^{\frac{1}{2}-\frac{4}{3}} + 1 + 5x^{\frac{1}{5}-\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{2}-\frac{4}{3}}\sqrt{3-\frac{2}{x}} + \sqrt[3]{2-\frac{3}{x}}} = \frac{2x^{-\frac{5}{6}} + 1 + 5x^{-\frac{17}{15}}}{x^{-\frac{5}{6}}\sqrt{3-\frac{2}{x}} + \sqrt[3]{2-\frac{3}{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$