Zadanie 1. Sprawdź zbieżność całki niewłaściwej, i w przypadku zbieżności oblicz ją

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx.$$

Rozwiązanie: Obliczmy najpierw całkę nieoznaczoną. Korzystamy z podstawienia $\arctan x = t$, wtedy $dt = \frac{1}{1+x^2}\, dx$:

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\arctan x)^2}{2} + C.$$

Sprawdzamy zbieżność każdej z całek niewłaściwych. Ze względu na parzystość wystarczyłoby sprawdzić zbieżność jednej, zbieżność drugiej będzie taka sama.

$$\int_0^M \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx = \left.\frac{(\arctan x)^2}{2}\right|_0^M =$$

$$= \frac{(\arctan M)^2}{2} - 0 \xrightarrow{M\to\infty} \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Sprawdzamy drugą całkę niewłaściwą:

$$\int_{-M}^0 \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx = \left.\frac{(\arctan x)^2}{2}\right|_{-M}^0 =$$

$$= 0 - \frac{(\arctan(-M))^2}{2} \xrightarrow{M\to\infty} -\frac{(-\frac{\pi}{2})^2}{2} = -\frac{\pi^2}{8}.$$

Całka niewłaściwa na całej prostej istnieje więc, i jest równa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} = 0.$$

Zadanie 2. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót obszaru pod wykresem funkcji $f(x) = \sin x$, na przedziale $[0, \pi]$, wokół osi OX

Rozwiązanie:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \cos x) \, dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Skorzystaliśmy z tożsamości trygonometrycznej $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$.

Zadanie 3. Oblicz całkę oznaczoną

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos(2x+1)\, dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez części:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} x^2 \cos(2x+1)\, dx &= \left.\frac{x^2 \sin(2x+1)}{2}\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} x \sin(2x+1)\, dx \\
&= \frac{4\pi^2 \sin(1)}{2} + \left.\frac{x\cos(2x+1)}{2}\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos(2x+1)\, dx \\
&= 2\pi^2 \sin(1) + \pi\cos(1) - \left.\frac{\sin(2x+1)}{2}\right|_0^{2\pi} \\
&= 2\pi^2 \sin(1) + \pi\cos(1).
\end{aligned}$$

Zadanie 4. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \log(x^2 - 1)\, dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez części.

$$\begin{aligned}
\int x' \log(x^2-1) &= x\log(x^2-1) - \int x \,\frac{1}{x^2-1}\, 2x\, dx \\
&= x\log(x^2-1) - 2\int \frac{x^2}{x^2-1}\, dx \\
&= x\log(x^2-1) - 2\int \frac{x^2-1+1}{x^2-1}\, dx \\
&= x\log(x^2-1) - 2\int \big(1 + \frac{1}{x^2-1}\big)\, dx \\
&= x\log(x^2-1) - 2x - \int \frac{2\, dx}{(x-1)(x+1)}.
\end{aligned}$$

Rozłóżmy na ułamki proste

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Liczymy całkę

$$\int \frac{2\, dx}{(x-1)(x+1)} = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \log|x-1| - \log|x+1| + C.$$

Podstawiając do obliczeń, otrzymujemy

$$\int x' \log(x^2-1) = x\log(x^2-1) - 2x - \log|x-1| + \log|x+1| + C.$$

Zadanie 5. Udowodnij oszacowanie

$$\frac{1}{11} < \int_9^{10} \frac{dx}{x+\sin x} < \frac{1}{8}.$$

Rozwiązanie: Na przedziale $[9,10]$ najbardziej brutalne szacowanie daje nam

$$9-1 < x+\sin x < 10+1,$$

czyli funkcja podcałkowa spełnia

$$\frac{1}{11} < \frac{1}{x+\sin x} < \frac{1}{8}.$$

Biorąc pod uwagę, że przedział całkowania ma długość 1, oszacowania funkcji podcałkowej dają nam oszacowania całki o które chodziło.

Zadanie 6. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}\, dx.$$

Rozwiązanie: Zauważamy, że funkcja wymierna pod całką ma rozkład

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1},$$

i obliczamy:

$$\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}\, dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx = \log|x+1| - \frac{1}{2}\log|2x+1| + C.$$

Zadanie 7. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx.$$

Rozwiązanie: Podstawiamy $t = e^x$, więc $dt = e^x dx$.

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C = \arctan e^x + C.$$

Zadanie 8. Oblicz przybliżoną wartość $\sqrt{50}$, korzystając z trzech początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora

Rozwiązanie: Dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ stosujemy przybliżenie wielomianem Taylora stopnia 2:

$$f(49+1) \simeq f(49) + f'(49)\cdot 1 + \frac{f''(49)}{2}\cdot 1^2.$$

Pozostaje tylko podstawić

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{(\sqrt{x})^3}.$$

Podstawiając, otrzymujemy

$$\sqrt{50} \simeq 7 + \frac{1}{14} - \frac{1}{8\cdot 7^3} = \frac{19403}{2744}.$$

Zadanie 9. Wyznacz promień zbieżności szeregu MacLaurina funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

Rozwiązanie: Z największą łatwością zauważamy, że

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, \frac{1}{(x+2)^{n+1}}, \quad \text{czyli} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n\, n!\, \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Szereg MacLaurina ma więc postać

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}\, x^n.$$

Podstawiamy współczynniki do wzoru na promień zbieżności, i mamy

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{2}} = \frac{1}{2},$$

czyli $R = 2$.

Zadanie 10. Znaleźć przedziały wypukłości (gdzie wypukła a gdzie wklęsła) i punkty przegięcia funkcji

$$f(x) = x^8 - x^2 + 7x - 15.$$

Rozwiązanie: Mamy

$$f'(x) = 8x^7 - 2x + 7, \qquad f''(x) = 56x^6 - 2.$$

Sprawdzenie wypukłości funkcji sprowadza się do sprawdzenia znaku ostatniego wielomianu, i otrzymujemy, że $f(x)$ jest wypukła na przedziałach $(-\infty, -\sqrt[6]{\frac{1}{28}})$ oraz $(\sqrt[6]{\frac{1}{28}}, +\infty)$, natomiast jest wklęsła na przedziale $(-\sqrt[6]{\frac{1}{28}}, \sqrt[6]{\frac{1}{28}})$. Punktami przegięcia wykresu są punkty $x = \pm\sqrt[6]{\frac{1}{28}}$.