Zadanie 1. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}.$$

Rozwiązanie: Stosujemy regułę de l'Hôspitala dwukrotnie:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cdot 2x}{-\sin x} && \text{(de l'H.)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2} + 2xe^{x^2}\cdot 2x}{-\cos x} && \text{(de l'H.)} \\
&= \frac{2+0}{-1} \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Zadanie 2. Funkcja $f(x)$ określona jest następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \ x < 0, \\ x & : \ 0 \leq x < 1, \\ -x^2 + 4x - 2 & : \ 1 \leq x < 3, \\ x - 3 & : \ x \geq 3. \end{cases}$$

Zbadaj ciągłość funkcji (czyli wskaż punkty nieciągłości, o ile istnieją).

Rozwiązanie: Funkcja jest ciągła wszędzie za wyjątkiem, być może, punktów sklejenia. Sprawdźmy granice jednostronne w punktach sklejenia.
$x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0,$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0,$$

(ciągła).
$x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1,$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x^2 + 4x - 2) = -1^2 + 4 - 2 = 1,$$

(ciągła).
$x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (-x^2 + 4x - 2) = -9 + 4 \cdot 3 - 2 = -11 + 12 = 1,$$
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x - 3) = 3 - 3 = 0,$$

(nieciągła). Jedynym punktem nieciągłości jest $x = 3$.

Zadanie 3. Znajdź pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{\cos^3(4x)}{\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Rozwiązanie:

$$f'(x) = \frac{3\cos^2(4x) \cdot (-\sin(4x)) \cdot 4 \cdot \sqrt{x} - \cos^3(4x)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}.$$

Zadanie 4. Znajdź wartość najmniejszą i największą danej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad [0,4].$$

Rozwiązanie: Obliczamy pochodną

$$f'(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0.$$

Wartości największa i najmniejsza muszą więc być przyjęte na końcach. $f(0) = -1$ oraz $f(4) = \frac{3}{5}$. W takim razie -1 to wartość najmniejsza, a $\frac{3}{5}$ największa.

Zadanie 5. Znajdź wartość najmniejszą i największą danej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = \sin(2x) - x, \quad [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Rozwiązanie: $f'(x) = \cos 2x \cdot 2 - 1$, czyli $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$. Gdy x przebiega $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ wtedy $2x$ przebiega $[-\pi, \pi]$, a w tym przedziale $\cos x$ ma 2 punkty, w których $= \frac{1}{2}$: są to $\pm\frac{\pi}{3}$. Więc $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ dla $x = \pm\frac{\pi}{6}$. Funkcja $f(x)$ przyjmuje więc wartości najmniejszą i największą na końcach $\pm\frac{\pi}{2}$ lub w punktach $\pm\frac{\pi}{6}$.

$$f(-\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{\pi}{2}, \qquad f(\tfrac{\pi}{2}) = -\tfrac{\pi}{2},$$
$$f(-\tfrac{\pi}{6}) = -\sin\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{6} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\pi}{6},$$
$$f(\tfrac{\pi}{6}) = \sin\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{\pi}{6}.$$

Pozostaje więc sprawdzić, która z liczb jest większa: $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ czy $\frac{\pi}{2}$. Stawiamy hipotezę

$$\begin{aligned} \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{\pi}{6} &< \tfrac{\pi}{2} \\ \tfrac{\sqrt{3}}{2} &< \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{2\pi}{3} \\ 3\sqrt{3} &< 4\pi \\ 27 &< 16\pi^2 \sim 151, \end{aligned}$$

a więc hipoteza była słuszna, istotnie $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$. W takim razie wartość najmniejsza to $-\frac{\pi}{2}$ a największa $\frac{\pi}{2}$.

Zadanie 6. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int (\sqrt{x}+1)\,(x-\sqrt{x}+1)\,dx.$$

Rozwiązanie: Po wymnożeniu do całkowania zostają funkcje potęgowe.

$$\begin{aligned}\int (\sqrt{x}+1)\,(x-\sqrt{x}+1)\,dx &= \int (x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+1)\,dx\\ &= \int (x^{\frac{3}{2}}+1)\,dx\\ &= \frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}}+x+C\\ &= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x+C.\end{aligned}$$

Zadanie 7. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x\log x}.$$

Rozwiązanie: Podstawiamy $\log x = t \;\Rightarrow\; dt = \frac{1}{x}dx$

$$\int \frac{dx}{x\log x} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|\log x| + C.$$

Zadanie 8. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int (x^2 - 2x)\, e^{-x}\, dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy dwukrotnie przez części

$$\begin{aligned}
\int (x^2 - 2x)\, e^{-x}\, dx &= \int (x^2 - 2x)\, \big(- e^{-x}\big)'\, dx \\
&= -(x^2 - 2x)\, e^{-x} + \int (2x - 2)\, e^{-x}\, dx \\
&= -(x^2 - 2x)\, e^{-x} + \int (2x - 2)\, \big(- e^{-x}\big)'\, dx \\
&= -(x^2 - 2x)\, e^{-x} - (2x - 2)\, e^{-x} + \int 2\, e^{-x}\, dx \\
&= (-x^2 + 2)\, e^{-x} - 2\, e^{-x} + C \\
&= -x^2\, e^{-x} + C.
\end{aligned}$$