Kolokwium 3
7.01.11

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Znajdź przedziały monotoniczności funkcji

$$f(x) = \sqrt[3]{(2x-3)(3-x)^2}.$$

Rozwiązanie: Liczymy pochodną:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{3}\big((2x-3)(3-x)^2\big)^{-\frac{2}{3}}\Big(2(3-x)^2 + (2x-3)2(3-x)(-1)\Big) \\
&= \frac{2(9-6x+x^2) - 2(-2x^2+9x-9)}{3\big((2x-3)(3-x)^2\big)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{6x^2-30x+36}{3\big((2x-3)(3-x)^2\big)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{2(x^2-5x+6)}{\big((2x-3)(3-x)^2\big)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{2(x-2)(x-3)}{\big((2x-3)(3-x)^2\big)^{\frac{2}{3}}}.
\end{aligned}$$

W mianowniku mamy parzystą potęgę, a więc znak f' wyznaczony jest przez znak licznika. Widzimy więc, że

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 \quad &\text{dla} \quad x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty), \\
f'(x) < 0 \quad &\text{dla} \quad x \in (2, 3).
\end{aligned}$$

Przedziałami monotoniczności są więc $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ oraz $(3, \infty)$.

Można też zauważyć od początku, że ponieważ podnoszenie do potęg 3 i 1/3 zachowuje nierówności, więc przedziały monotoniczności f są takie same, jak przedziały monotoniczności funkcji

$$(2x-3)(3-x)^2,$$

co upraszcza trochę liczenie pochodnej.

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź wartości najmniejszą i największą podanej funkcji na przedziale $[0, 1]$:

$$f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}.$$

Rozwiązanie: Pierwiastki mianownika, czyli $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, leżą poza rozważanym przedziałem, a więc funkcja jest różniczkowalna wszędzie wewnątrz przedziału $[0, 1]$. Wartości najmniejsza i największa są więc przyjęte na końcach przedziału lub w punktach krytycznych $f'(x) = 0$. Szukamy punktów krytycznych:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-1 + 2x)(1 + x - x^2) - (1 - x + x^2)(1 - 2x)}{(1 + x - x^2)^2} \\ &= \frac{-2x^3 + 3x^2 + x - 1 - (-2x^3 + 3x^2 - 3x + 1)}{(1 + x - x^2)^2} \\ &= \frac{4x - 2}{(1 + x - x^2)^2}. \end{aligned}$$

Jedynym punktem krytycznym jest więc $x = \frac{1}{2}$, który leży w rozważanym przedziale. Obliczamy i porównujemy więc wartości funkcji f w punktach $0, \frac{1}{2}, 1$:

$$f(0) = 1, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}, \qquad f(1) = 1,$$

a więc wartość najmniejsza to $\frac{3}{5}$, a wartość największa to 1.

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x\tan x}\right).$$

Rozwiązanie: Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika i zauważamy, że otrzymaliśmy wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$ w 0:

$$\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x\tan x}=\frac{\tan x - x}{2x^2\tan x}=\frac{\sin x - x\cos x}{2x^2\sin x}.$$

Stosujemy więc regułę de l'Hôpitala i obliczamy pochodne w liczniku i mianowniku:

$$\frac{\cos x-\cos x + x\sin x}{4x\sin x+2x^2\cos x}=\frac{x\sin x}{4x\sin x+2x^2\cos x}=\frac{\frac{\sin x}{x}}{4\frac{\sin x}{x}+2\cos x}.$$

Przypominamy sobie teraz, że $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, a więc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{4\frac{\sin x}{x}+2\cos x}=\frac{1}{4+2}=\frac{1}{6}.$$

Ewentualnie, jeżeli nie przypominamy sobie, że $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, to możemy jeszcze dwukrotnie zastosować regułę de l'Hôpitala.

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)}.$$

Rozwiązanie: Stosujemy znany trick:

$$x^{1/(1-x)} = e^{\log x^{1/(1-x)}} = e^{\frac{1}{1-x}\log x} = e^{\frac{\log x}{1-x}}.$$

Wiemy, że z granicą możemy wejść do wykładnika, a w wykładniku mamy wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$ w 1. Stosujemy więc regułę de l'Hôpitala:

$$\frac{(\log x)'}{(1-x)'} = \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -\frac{1}{x} \xrightarrow{x\to 1} -1.$$

Mamy więc

$$\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź równania asymptot wykresu następującej funkcji:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-4}.$$

Rozwiązanie: Mamy

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = +\infty,$$

a więc wykres ma jedną pionową asymptotę o równaniu $x = 4$. Badamy asymptoty w nieskończonościach:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Wykres ma więc poziomą asymptotę o równaniu $y = 2$ w $+\infty$ i $-\infty$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź punkty przegięcia wykresu następującej funkcji:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Rozwiązanie: Punkty przegięcia to punkty w których funkcja zmienia swoją wypukłość, czyli druga pochodna zmienia znak. Policzmy więc drugą pochodną:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}\right)' \\
&= \left(\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}\right)' \\
&= \frac{(-4x)(x^2+1)^2-(-2x^2+2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} \\
&= \frac{(-4x)(x^2+1)-(-2x^2+2)2\cdot 2x}{(x^2+1)^3} \\
&= \frac{-4x^3-4x+8x^3-8x}{(x^2+1)^3} \\
&= \frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3} \\
&= \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \\
&= \frac{4x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}.
\end{aligned}$$

Druga pochodna zmienia znak w punkcie $-\sqrt{3}$ (z ujemnego na dodatni), w punkcie 0 (z dodatniego na ujemny) oraz w punkcie $\sqrt{3}$ (z ujemnego na dodatni). Punkty przegięcia to $0, \pm\sqrt{3}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}.$$

Rozwiązanie: Liczymy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^3+1)^{\frac{1}{3}} - x^2\frac{1}{3}(x^3+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2}{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{2x(x^3+1) - x^4}{(x^3+1)^{\frac{4}{3}}} \\ &= \frac{x^4+2x}{(x^3+1)^{\frac{4}{3}}}. \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Oblicz pochodną rzędu 3 funkcji:

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

Rozwiązanie: Liczymy:

$$f'(x) = \frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

Dalej:

$$f''(x) = (2(1-x)^{-2})' = 2(-2)(1-x)^{-3}(-1) = 4(1-x)^{-3},$$
$$f'''(x) = 4(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 12(1-x)^{-4} = \frac{12}{(1-x)^4}.$$