Kolokwium 3
13.01.12

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x-1}}.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez podstawienie:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x-1}} &= \left\{ \begin{array}{c} y=2+\sqrt[3]{x-1} \\ dy=\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx \\ 3(y-2)^2\,dy=dx \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{3\,(y-2)^2}{y}\,dy \\
&= \int \frac{3\,y^2-12\,y+12\,y}{y}\,dy \\
&= 3\int y\,dy - 12\int dy + 12\int \frac{gy}{y} \\
&= \frac{3}{2}\,y^2 - 12\,y + 12\,\log|y| + C \\
&= \frac{3}{2}\,(2+\sqrt[3]{x-1})^2 - 12\,(2+\sqrt[3]{x-1}) + 12\,\log|2+\sqrt[3]{x-1}| + C.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz długość krzywej, będącej wykresem podanej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}, \qquad [0, \tfrac{4}{3}].$$

Rozwiązanie: Obliczamy pochodną:

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}\, x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}\, x}.$$

Wstawiamy do wzoru i całkujemy przez podstawienie:

$$L = \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}\, x}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} y = 1 + \frac{9}{4}\, x \\ dy = \frac{9}{4}\, dx \end{array} \right\} = \frac{4}{9} \int_1^4 \sqrt{y}\, dy$$

$$= \frac{4}{9}\, \frac{2}{3}\, y^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{8}{27}\, (8 - 1) = \frac{56}{27}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez podstawienie:

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx = \left\{ \begin{smallmatrix} y = e^x \\ dy = e^x\, dx \\ dy = y\, dx \\ \frac{dy}{y} = dx \end{smallmatrix} \right\} = \int \frac{y-1}{y+1}\, \frac{dy}{y}.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na 2 ułamki proste:

$$\frac{y-1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{(A+B)\,y + A}{y(y+1)},$$

skąd $A = -1$, $B = 2$, czyli

$$\begin{aligned} \int \frac{y-1}{y+1}\, \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dy}{y} + 2 \int \frac{dy}{y+1} = -\log|y| + 2\, \log|y+1| + C \\ &= -\log e^x + 2\, \log(e^x + 1) + C = -x + 2 \log(e^x + 1) + C. \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int (2+\sqrt{x})(\sqrt[3]{x}-x+1)\,dx.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\int (2+\sqrt{x})(\sqrt[3]{x}-x+1)\,dx &= \int \left(2\,\sqrt[3]{x}-2\,x+2+\sqrt{x}\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\,x+\sqrt{x}\right)dx\\ &= \int \left(2\,x^{\frac{1}{3}}-2\,x+2+x^{\frac{5}{6}}-x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)dx\\ &= 2\,\frac{3}{4}\,x^{\frac{4}{3}}-x^2+2\,x+\frac{6}{11}\,x^{\frac{11}{6}}-\frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót obszaru pod wykresem funkcji

$$f(x) = \cos x, \qquad x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

wokół osi OX.

Rozwiązanie: Podstawiamy do wzoru:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx \\ &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + 1}{2} \, dx \\ &= \pi \left(\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi \left(\frac{\pi}{4} - (- \frac{\pi}{4}) \right) \\ &= \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int x\, \cos(2\,x+1)\, dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez części:

$$\begin{aligned}\int x\, \cos(2\,x+1)\, dx &= \int x \left(\frac{\sin(2\,x+1)}{2}\right)' dx \\ &= \frac{x \sin(2\,x+1)}{2} + \frac{\cos(2\,x+1)}{4} + C.\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej i oblicz ją, jeżeli istnieje:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\,(\log x)^2}.$$

Rozwiązanie: Funkcja podcałkowa jest ciągła na $[2,\infty)$, czyli niewłaściwość całki wynika tylko z nieskończonego przedziału całkowania. Badamy więc całki

$$\int_2^M \frac{dx}{x\,(\log x)^2}.$$

Stosujemy podstawienie

$$\begin{aligned}\int_2^M \frac{dx}{x\,(\log x)^2} &= \left\{\begin{array}{l} y = \log x \\ dy = \frac{1}{x}dx \end{array}\right\} = \int_{\log 2}^{\log M} \frac{dy}{y^2} \\ &= -\left.\frac{1}{y}\right|_{\log 2}^{\log M} = \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log M} \xrightarrow{M\to\infty} \frac{1}{\log 2}.\end{aligned}$$

Całka niewłaściwa jest więc zbieżna i wynosi $\frac{1}{\log 2}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{x+3}{x^2+6\,x-2}\,dx.$$

Rozwiązanie:

$$\int \frac{x+3}{x^2+6\,x-2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\,x+6}{x^2+6\,x-2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} y = x^2+6\,x-2 \\ dy = (2\,x+6)\,dx \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y}$$
$$= \frac{1}{2}\,\log|y| + C = \frac{1}{2}\,\log|x^2+6\,x-2| + C.$$