**Kolokwium 3**
**7.01.13**

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 1.** Oblicz całkę:

$$\int \frac{dx}{5x^2+6}.$$

**Rozwiązanie:**

$$\int \frac{dx}{5x^2+6} = \int \frac{dx}{6\left(\frac{5}{6}x^2+1\right)} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\left(\frac{5}{6}x^2+1\right)} = \left\{ \begin{array}{c} t = \sqrt{\frac{5}{6}}\,x \\ dt = \sqrt{\frac{5}{6}}\,dx \end{array} \right\} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{6}{5}}\int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{6}{5}}\arctan t + c = \frac{1}{\sqrt{30}}\arctan\sqrt{\frac{5}{6}}x + c.$$

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 2.** Oblicz całkę:

$$\int \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2}, \qquad x \neq 0.$$

**Rozwiązanie:**

$$\int \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2} = \left\{ \begin{array}{c} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2}\,dx \end{array} \right\} = -\int \sin t\,dt = \cos t + c = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + c.$$

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 3.** Oblicz całkę:

$$\int 1 \cdot \arctan x \, dx.$$

**Rozwiązanie:**

$$\begin{aligned}
\int 1 \cdot \arctan x \, dx &= \int x' \arctan x \, dx \\
&= x \arctan x - \int x \, \frac{1}{x^2+1} \, dx \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x \, dx}{x^2+1} = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x \, dx \end{array} \right\} \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \log |t| + c \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + c.
\end{aligned}$$

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 4.** Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left( \tan x - \frac{1}{1-\sin x} \right).$$

**Rozwiązanie:** To jest wyrażenie postaci $\infty - \infty$ w $\frac{\pi}{2}$, więc najpierw przekształcamy je do postaci $\frac{0}{0}$. a potem stosujemy regułę de l'Hôpitala.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left( \tan x - \frac{1}{1-\sin x} \right) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{1-\sin x} \right) \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sin^2 x - \cos x}{\cos x(1-\sin x)} \\
\text{de l'H} \quad \to &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 2\sin x\cos x + \sin x}{-\sin x(1-\sin x) + \cos x(-\cos x)}.
\end{aligned}$$

Licznik ma granicę 1, która jest ściśle dodatnia, a mianownik ma granicę 0, i w okolicy $\frac{\pi}{2}$ jest ujemny. Ostatnia granica istnieje więc jako granica niewłaściwa $-\infty$. Wiemy, że regułę de l'Hôpitala można stosować do granic niewłaściwych. Mamy więc

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left( \tan x - \frac{1}{1-\sin x} \right) = -\infty.$$

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 5.** Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}.$$

**Rozwiązanie:** To jest wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$ w 0, więc stosujemy de l'Hôpitala, dwukrotnie:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3\sin^2 x\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{3\sin x\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3(\cos^2 x - \sin^2 x)} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 6.** Znajdź równanie asymptoty w $+\infty$ (o ile asymptota istnieje) funkcji:

$$f(x) = x \log\left(e + \frac{2}{x}\right).$$

**Rozwiązanie:** Sprawdzamy współczynnik kierunkowy ewentualnej asymptoty:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \log\left(e + \frac{2}{x}\right) = \log e = 1.$$

Teraz sprawdzamy granicę

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x\to\infty} x \log\left(e + \frac{2}{x}\right) - x \\
&= \lim_{x\to\infty} x\left(\log\left(e + \frac{2}{x}\right) - 1\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} x\left(\log\left(e + \frac{2}{x}\right) - \log e\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} x \log \frac{e + \frac{2}{x}}{e} \\
&= \lim_{x\to\infty} x \log\left(1 + \frac{2}{e\,x}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{2}{e\,x}\right)}{\frac{1}{x}} \\
\text{de l'H} \quad \to &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{2}{e\,x}} \cdot \left(-\frac{2}{e\,x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{e}}{1 + \frac{2}{e\,x}} \\
&= \frac{2}{e}.
\end{aligned}$$

Asymptota ukośna istnieje więc, i jej równanie ma postać $y = x + \frac{2}{e}$.

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 7.** Znajdź wartość największą i najmniejszą następującej funkcji w podanym przedziale:

$$f(x) = \sin 2x - x, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

**Rozwiązanie:** Sprawdzamy wartości funkcji na końcach przedziału: $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$. Następnie szukamy punktów zerowych pochodnej.

$$f'(x) = 2\cos 2x - 1,$$

a więc pochodna znika w punkcie w którym

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 3\sqrt{3} > \pi \Leftrightarrow 27 > \pi^2.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo $\pi < 4 \Rightarrow \pi^2 < 16$. Wartość największa funkcji to $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$, a wartość najmniejsza to $-\frac{\pi}{2}$.

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 8.** Dla podanej funkcji $f$ oblicz $f^{(6)}$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}.$$

**Rozwiązanie:**

$$\begin{aligned}
f(x) &= (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \\
f'(x) &= \Big(-\frac{1}{2}\Big)(2x+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = (-1)(2x+1)^{-\frac{3}{2}} \\
f''(x) &= (-1) \cdot \Big(-\frac{3}{2}\Big)(2x+1)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2 \\
&= (-1) \cdot (-3)(2x+1)^{-\frac{5}{2}} \\
&= 3(2x+1)^{-\frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

Widać więc, że można łatwo udowodnić indukcyjnie, że

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= (-1)^n (2n-1)!!(2x+1)^{-\frac{2n+1}{2}} \\
f^{(6)}(x) &= 11!!(2x+1)^{-\frac{13}{2}}.
\end{aligned}$$