

**Kolokwium 3**  
**10.01.14**

Nazwisko i imię:

**Zadanie 1.** Dla jakich wartości parametrów  $a$  i  $b$  funkcja sklejona

$$f(x) = \begin{cases} ax & : x \leq -\frac{\pi}{4}, \\ \cos(x) & : -\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ ax + b & : \frac{\pi}{4} < x \end{cases}$$

jest ciągła?

**Rozwiązanie:** Funkcja jest ciągła we wszystkich punktach poza, być może, punktami sklejania, gdyż jest tam albo wielomianem albo cosinusem. Sprawdźmy granice jednostronne w punktach sklejania.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} ax = -\frac{a\pi}{4}, \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Jeżeli granice mają być równe, to

$$-\frac{a\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -\frac{4}{\sqrt{2}\pi} = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} ax + b = \frac{a\pi}{4} + b = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\pi}{4} + b = -\frac{1}{\sqrt{2}} + b.$$

Jeżeli granice mają być równe, to

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + b \Rightarrow b = \sqrt{2}.$$

Odp.:  $a = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ ,  $b = \sqrt{2}$ .

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

**Zadanie 2.** Znajdź parametr  $a$  dla którego podana funkcja sklejona

$$f(x) = \begin{cases} 1 - ax & : x \leq 0, \\ e^{-\frac{x}{2}} & : x > 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w 0. Przy tak dobranym  $a$  oblicz  $f'(0)$ .

**Rozwiązanie:** Zbadajmy granice jednostronne ilorazów różnicowych:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - ax - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-ax}{x} = -a,$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x}{2}} - 1}{x} = g'(0), \quad \text{gdzie } g(x) = e^{-\frac{x}{2}},$$

czyli  $g'(0) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{0}{2}} = -\frac{1}{2}$ . Granice jednostronne są więc równe (czyli granica istnieje) jeżeli  $-\frac{1}{2} = -a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ . Granica ta, czyli  $f'(0)$  jest równa  $-\frac{1}{2}$ .

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 3.** Znajdź promień podstawy cylindra o podstawie będącej kołem, o ustalonej objętości  $V$  którego pole powierzchni (powierzchnia boczna, denko i wieczko) jest najmniejsze.

**Rozwiązanie:** Objętość cylindra to  $\pi R^2 H$ , gdzie  $R$  to promień podstawy, a  $H$  to wysokość. Mamy więc

$$\pi R^2 \cdot H = V \Rightarrow H = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Pole powierzchni to  $2\pi R^2$  (denko i wieczko) plus  $2\pi R \cdot H$  (powierzchnia boczna):

$$P = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot H = 2\pi R^2 + 2\pi R \frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

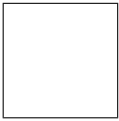
Pytanie więc brzmi: dla jakiej wartości  $R$  pole  $P$  przyjmuje najmniejszą wartość. Szukamy minimum funkcji

$$f(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

Obliczamy pochodną:

$$f'(R) = 4\pi R - \frac{2V}{R^2}, \quad f'(R) = 0 \Leftrightarrow 4\pi R = \frac{2V}{R^2} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Pochodna zeruje się tylko w jednym punkcie,  $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ , przy czym na lewo od tego punktu jest ujemna, a na prawo dodatnia. Funkcja  $f$  maleje więc na  $(0, \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}})$ , a następnie rośnie na  $(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, +\infty)$ . Przyjmuje więc najmniejszą wartość w punkcie  $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ .



Pierwsza litera nazwiska

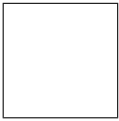
Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \log x \log(x-1).$$

**Rozwiązanie:** Gdy  $x \rightarrow 1^+$  jest to wyrażenie nieoznaczone postaci  $\infty \cdot 0$ . Przekształcamy je do postaci  $\frac{0}{0}$  i stosujemy (dwukrotnie) regułę de l'Hospitala:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \log x \log(x-1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(x-1)}{\frac{1}{\log x}} \\ \text{de l'H} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(x-1)'}{\left(\frac{1}{\log x}\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{\log^2 x} \cdot \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x \log^2 x}{x-1} \\ \text{de l'H} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\log^2 x - x2 \log x \frac{1}{x}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -\log^2 x - 2 \log x \\ &= 0. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 5.** Udowodnij, że dla dowolnego  $x > 0$  zachodzi:

$$\log(x + 1) < x.$$

**Rozwiązanie:** Rozważmy funkcję

$$f(x) = x - \log(x + 1), \quad x \geq 0.$$

Mamy  $f(0) = 0$  i

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} > 0, \quad x > 0.$$

Biorąc dowolne  $x > 0$  i stosując wzór Cauchy'ego dla przedziału  $[0, x]$  istnieje  $c \in (0, x)$  takie, że

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c) = 1 - \frac{1}{c+1},$$

czyli

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{c+1}\right) \cdot x > 0, \quad \text{gdyż } c > 0.$$

Tak więc dla każdego  $x > 0$  mamy  $f(x) > 0 \Rightarrow \log(x + 1) < x$ .

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

**Zadanie 6.** Znajdź punkty przegięcia funkcji:

$$f(x) = x \cdot \sin(\log x).$$

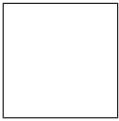
**Rozwiązanie:** Dziedzina funkcji jest  $(0, \infty)$  i funkcja jest wszędzie na swojej dziedzinie 2-krotnie różniczkowalna. Policzmy 2 pochodną:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(\log x) + x \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \sin(\log x) + \cos(\log x) \\ f''(x) &= \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} - \sin(\log x) \cdot \frac{1}{x} \\ &= (\cos(\log x) - \sin(\log x)) \cdot \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Interesuje nas znak tego wyrażenia, więc możemy pominąć  $x$ , które jest dodatnie. Mamy

$$\begin{aligned} \cos(t) > \sin(t) & \quad f \in \left( -\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi \right) + 2k\pi, \\ \cos(t) < \sin(t) & \quad f \in \left( \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \right) + 2k\pi. \end{aligned}$$

$f''$  zmienia więc znak w punktach  $x$  takich, że  $\log x = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$  oraz  $\log x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ , czyli  $\log x = \frac{1}{4}\pi + k\pi$ . Ostatecznie więc punkty przegięcia to  $x = e^{(k+\frac{1}{4})\pi}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



Pierwsza litera nazwiska

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 7.** Znajdź punkty różniczkowości i oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \log(\log^2(\log^3 x)).$$

**Rozwiązanie:** Funkcja ta jest złożeniem funkcji różniczkowalnych, więc jest różniczkowalna na całej swojej dziedzinie. Jaka jest ta dziedzina? Po pierwsze, zewnętrzny logarytm wymaga

$$\log^2(\log^3 x) > 0 \Leftrightarrow \log^2(\log^3 x) \neq 0 \Leftrightarrow \log^3 x \neq 1 \Leftrightarrow \log x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq e.$$

Dodatkowo „środkowy” logarytm wymaga

$$\log^3 x > 0 \Leftrightarrow \log x > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Wewnętrzny logarytm wymaga  $x > 0$ , więc podsumowując

$$D_f = (1, e) \cup (e, +\infty).$$

$f$  jest różniczkowalna w każdym punkcie  $D_f$ .

$$f'(x) = \frac{1}{\log^2(\log^3 x)} \cdot 2 \log(\log^3 x) \cdot \frac{1}{\log^3 x} \cdot 3 \log^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{6 \log(\log^3 x) \log^2 x}{\log^2(\log^3) \cdot \log^3 x \cdot x}.$$