Pierwsza litera nazwiska

Kolokwium 3
10.01.14

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja sklejona

$$f(x) = \begin{cases} ax & : x \le -\frac{\pi}{4}, \\ \cos(x) & : -\frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{4}, \\ ax + b & : \frac{\pi}{4} < x \end{cases}$$

jest ciągła?

Rozwiązanie: Funkcja jest ciągła we wszystkich punktach poza, być może, punktami sklejenia, gdyż jest tam albo wielomianem albo cosinusem. Sprawdźmy granice jednostronne w punktach sklejenia.

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} a\,x = -\frac{a\,\pi}{4},$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Jeżeli granice mają być równe, to

$$-\frac{a\,\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; a = -\frac{4}{\sqrt{2}\,\pi} = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} a\,x + b = \frac{a\,\pi}{4} + b = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{\pi}{4} + b = -\frac{1}{\sqrt{2}} + b.$$

Jeżeli granice mają być równe, to

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + b \;\Rightarrow\; b = \sqrt{2}.$$

Odp.: $a = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi},\ b = \sqrt{2}.$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź parametr a dla którego podana funkcja sklejona

$$f(x) = \begin{cases} 1 - ax & : x \leq 0, \\ e^{-\frac{x}{2}} & : x > 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w 0. Przy tak dobranym a oblicz $f'(0)$.

Rozwiązanie: Zbadajmy granice jednostronne ilorazów różnicowych:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - a\,x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-a\,x}{x} = -a,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x}{2}} - 1}{x} = g'(0), \quad \text{gdzie } g(x) = e^{-\frac{x}{2}},$$

czyli $g'(0) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{0}{2}} = -\frac{1}{2}$. Granice jednostronne są więc równe (czyli granica istnieje) jeżeli $-\frac{1}{2} = -a \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{2}$. Granica ta, czyli $f'(0)$ jest równa $-\frac{1}{2}$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź promień podstawy cylindra o podstawie będącej kołem, o ustalonej objętości V którego pole powierzchni (powierzchnia boczna, denko i wieczko) jest najmniejsze.

Rozwiązanie: Objętość cylindra to $\pi R^2 H$, gdzie R to promień podstawy, a H to wysokość. Mamy więc

$$\pi R^2 \cdot H = V \;\Rightarrow\; H = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Pole powierzchni to $2\pi R^2$ (denko i wieczko) plus $2\pi R \cdot H$ (powierzchnia boczna):

$$P = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot H = 2\pi R^2 + 2\pi R \frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

Pytanie więc brzmi: dla jakiej wartości R pole P przyjmuje najmniejszą wartość. Szukamy minimum funkcji

$$f(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

Obliczamy pochodną:

$$f'(R) = 4\pi R - \frac{2V}{R^2}, \quad f'(R) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4\pi R = \frac{2V}{R^2} \;\Leftrightarrow\; R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Pochodna zeruje się tylko w jednym punkcie, $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, przy czym na lewo od tego punktu jest ujemna, a na prawo dodatnia. Funkcja f maleje więc na $(0, \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}})$, a następnie rośnie na $(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, +\infty)$. Przyjmuje więc najmniejszą wartość w punkcie $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 1^+} \log x \log(x-1).$$

Rozwiązanie: Gdy $x \to 1^+$ jest to wyrażenie nieoznaczone postaci $\infty \cdot 0$. Przekształcamy je do postaci $\frac{0}{0}$ i stosujemy (dwukrotnie) regułę de l'Hospitala:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \log x \log(x-1) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x-1)}{\frac{1}{\log x}} \\
\text{de l'H} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x-1)'}{\left(\frac{1}{\log x}\right)'} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{\log^2 x} \cdot \frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{-x \log^2 x}{x-1} \\
\text{de l'H} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{-\log^2 x - x 2 \log x \frac{1}{x}}{1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} -\log^2 x - 2\log x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Udowodnij, że dla dowolnego $x > 0$ zachodzi:

$$\log(x+1) < x.$$

Rozwiązanie: Rozważmy funkcję

$$f(x) = x - \log(x+1), \qquad x \geq 0.$$

Mamy $f(0) = 0$ i

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} > 0, \qquad x > 0.$$

Biorąc dowolne $x > 0$ i stosując wzór Cauchy'ego dla przedziału $[0, x]$ istnieje $c \in (0, x)$ takie, że

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c) = 1 - \frac{1}{c+1},$$

czyli

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{c+1}\right) \cdot x > 0, \quad \text{gdyż } c > 0.$$

Tak więc dla każdego $x > 0$ mamy $f(x) > 0 \Rightarrow \log(x+1) < x$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź punkty przegięcia funkcji:

$$f(x) = x \cdot \sin(\log x).$$

Rozwiązanie: Dziedziną funkcji jest $(0, \infty)$ i funkcja jest wszędzie na swojej dziedzinie 2-krotnie różniczkowalna. Policzmy 2 pochodną:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(\log x) + x\cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \sin(\log x) + \cos(\log x) \\ f''(x) &= \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} - \sin(\log x) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \big(\cos(\log x) - \sin(\log x)\big) \cdot \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Interesuje nas znak tego wyrażenia, więc możemy pominąć x, które jest dodatnie. Mamy

$$\begin{aligned} \cos(t) > \sin(t) \qquad & f \in \Big(-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\Big) + 2k\pi, \\ \cos(t) < \sin(t) \qquad & f \in \Big(\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\Big) + 2k\pi. \end{aligned}$$

f'' zmienia więc znak w punktach x takich, że $\log x = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$ oraz $\log x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$, czyli $\log x = \frac{1}{4}\pi + k\pi$. Ostatecznie więc punkty przegięcia to $x = e^{(k+\frac{1}{4})\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Znajdź punkty różniczkowalności i oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \log(\log^2(\log^3 x)).$$

Rozwiązanie: Funkcja ta jest złożeniem funkcji różniczkowalnych, więc jest różniczkowalna na całej swojej dziedzinie. Jaka jest ta dziedzina? Po pierwsze, zewnętrzny logarytm wymaga

$$\log^2(\log^3 x) > 0 \;\Leftrightarrow\; \log^2(\log^3 x) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \log^3 x \neq 1 \;\Leftrightarrow\; \log x \neq 1 \;\Leftrightarrow\; x \neq e.$$

Dodatkowo „środkowy" logarytm wymaga

$$\log^3 x > 0 \;\Leftrightarrow\; \log x > 0 \;\Leftrightarrow\; x > 1.$$

Wewnętrzny logarytm wymaga $x > 0$, więc podsumowując

$$D_f = (1, e) \cup (e, +\infty).$$

f jest różniczkowalna w każdym punkcie D_f.

$$f'(x) = \frac{1}{\log^2(\log^3 x)} \cdot 2\,\log(\log^3 x) \cdot \frac{1}{\log^3 x} \cdot 3\log^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{6\,\log(\log^3 x)\,\log^2 x}{\log^2(\log^3) \cdot \log^3 x \cdot x}.$$