

Pierwsza litera nazwiska

1

**Kolokwium 3**  
**9.01.15**

Nazwisko i imię:

**Zadanie 1.** Oblicz pochodną następującej funkcji

$$f(x) = x^2 \sqrt{1 + \sqrt{x}}.$$

**Rozwiązanie:**

$$f'(x) = 2x \cdot \sqrt{1 + \sqrt{x}} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6(2x)}.$$

**Rozwiązanie:** Jest to wyrażenie nieoznaczone postaci  $\frac{0}{0}$  w 0, więc możemy stosować regułę de l'Hospitala. Stosując tą metodę wprost musimy różniczkować licznik i mianownik wielokrotnie, w dodatku kolejne pochodne mianownika będą coraz bardziej zawile. Możemy też skorzystać ze znanej granicy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x}{\sin 2x} \right)^6 = 1,$$

więc

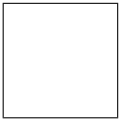
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6(2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{(2x)^6} \cdot \frac{(2x)^6}{\sin^6(2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{64 x^6}. \end{aligned}$$

Możemy sobie uprościć obliczenia dalej, zauważając, że  $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow x^3 \rightarrow 0$ , więc powyższa granica jest równa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{64 x^2}.$$

Ta ostatnia granica da się łatwo obliczyć stosując regułę de l'Hospitala 2-krotnie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{64 x^2} \stackrel{\text{de l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{128 x} \stackrel{\text{de l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{128} = \frac{1}{128}.$$



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

**Zadanie 3.** Oblicz całkę:

$$\int e^{-x^3} x^2 dx.$$

**Rozwiązanie:** Stosujemy podstawienie

$$\begin{aligned} \int e^{-x^3} x^2 dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right\} \\ &= \int e^{-t} \frac{1}{3} dt \\ &= -\frac{1}{3} e^{-t} + C \\ &= -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C. \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

**Zadanie 4.** Znajdź najmniejszą i największą wartość danej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad \text{na } [-3, 2].$$

**Rozwiązanie:** Znajdujemy wartości funkcji na końcach przedziału i w punktach krytycznych

$$\begin{aligned} f(-3) &= 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 12(-3) + 1 \\ &= -54 + 27 + 36 + 1 \\ &= 10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 1 \\ &= 16 + 12 - 24 + 1. \end{aligned}$$

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$ . Szukamy punktów krytycznych.  $6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$  lub  $x = -2$ .

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 + 3 - 12 + 1 \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 1 \\ &= -16 + 12 + 24 + 1 \\ &= 21. \end{aligned}$$

Wartość najmniejsza to  $-6$  a największa to  $21$ .



Pierwsza litera nazwiska

5

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 5.** Udowodnij, że dla  $x > 0$  zachodzi nierówność

$$\frac{x}{x+1} < \log(1+x).$$

**Rozwiązanie:** Rozważmy funkcję

$$f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{x+1}.$$

Mamy  $f(0) = 0$ , oraz

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{1+x} \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right) > 0. \end{aligned}$$

Pochodna jest więc ściśle dodatnia na przedziale nieskończonym  $(0, \infty)$  a więc funkcja jest ściśle rosnąca na domkniętym przedziale nieskończonym  $[0, \infty)$ . W takim razie dla  $x > 0$  mamy  $f(x) > f(0) = 0$ , a to jest nierówność o którą chodziło.

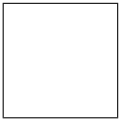
Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz całkę

$$\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x - 1} dx.$$

**Rozwiązanie:** Możemy policzyć tą całkę dzieląc licznik przez mianownik jako wielomiany z resztą. Możemy też zrobić proste podstawienie:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x - 1} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = x - 1 \\ dt = dx \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{(t + 1)^4 + (t + 1)^2 + 1}{t} dt \\ &= \int \frac{t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 + t^2 + 2t + 1 + 1}{t} dt \\ &= \int \frac{t^4 + 4t^3 + 7t^2 + 6t + 3}{t} dt \\ &= \int \left( t^3 + 4t^2 + 7t + 6 + \frac{3}{t} \right) dt \\ &= \frac{t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} + \frac{7t^2}{2} + 6t + 3 \log |t| + C \\ &= \frac{(x - 1)^4}{4} + \frac{4(x - 1)^3}{3} + \frac{7(x - 1)^2}{2} + 6(x - 1) + 3 \log |x - 1| + C. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz całkę

$$\int \frac{\log x}{x^3} dx.$$

**Rozwiązanie:** Stosujemy całkowanie przez części:

$$\begin{aligned} \int \frac{\log x}{x^3} dx &= \int \log x \left( \frac{x^{-2}}{-2} \right)' dx \\ &= \frac{\log x (x^{-2})}{-2} + \frac{1}{2} \int (\log x)' x^{-2} dx \\ &= \frac{\log x}{-2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^3} dx \\ &= \frac{\log x}{-2x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{x^{-2}}{-2} \right) + C \\ &= -\frac{\log x + \frac{1}{2}}{2x^2} + C. \end{aligned}$$