Pierwsza litera nazwiska

1

Kolokwium 3
8.01.16

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz całkę
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez podstawienie:
$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \left\{\begin{matrix} t = x^2-1 \\ dt = 2xdx \end{matrix}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{\sqrt{t}}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{x^2-1}^3 + \sqrt{x^2-1} + C.\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Udowodnij oszacowanie:

$$\int_{-1}^{2} \frac{|x|}{x^2+1}\,dx < \frac{3}{2}.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że przedział całkowania ma długość 3. Znajdźmy maksymalną wartość funkcji podcałkowej na $[-1,2]$. Funkcja jest parzysta, więc wystarczy zbadać ją na $[0,2]$. Wartość w 0 to 0, w 2 to $0,4$, oraz

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Patrząc na znak licznika widzimy, że w $x=1$ jest maksimum, równe $\frac{1}{2}$. Mamy więc

$$\int_{-1}^{2} \frac{|x|}{x^2+1}\,dx \leq 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Wiemy, że równość może zajść tylko w przypadku gdy funkcja podcałkowa (która jest ciągła) jest stale równa $\frac{1}{2}$, a wiemy, że tak nie jest. Nierówność jest więc ostra.

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz długość wykresu funkcji $f(x) = \log\cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

Rozwiązanie: Mamy
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx,$$
oraz $f(x) = \log\cos x$, $f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$, więc
$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \left\{ \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right\} \\
&= -\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = \left\{ \begin{matrix} s = 1 - t^2 \\ ds = -2tdt \end{matrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{(1-s)\sqrt{s}} = \left\{ \begin{matrix} u = \sqrt{s} \\ du = \dfrac{1}{2\sqrt{s}} ds \end{matrix} \right\} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{1-u^2}.
\end{aligned}$$
Rozkładamy na ułamki proste:
$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-u} + \frac{\frac{1}{2}}{1+u}.$$
Czyli:
$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\frac{1}{2}}{1-u}\, du + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\frac{1}{2}}{1+u}\, du \\
&= -\frac{1}{2}\log|1-u|\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2}\log|1+u|\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= -\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&= \log\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz pole powierzchni powstałej przez obrót paraboli sześciennej

$$3y - x^3 = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

wokół osi OX.

Rozwiązanie: Mamy $f(x) = y = \frac{x^3}{3}$, oraz

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx,$$

więc

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{3}\sqrt{1 + x^4}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} t = 1 + x^4 \\ dt = 4x^3 dx \end{array} \right\} \\ &= \frac{\pi}{6} \int_1^2 \sqrt{t}\, dt \\ &= \frac{\pi}{6} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_2^2 \\ &= \frac{\pi}{9}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{\pi}{9}(2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Sprawdź, czy następująca całka niewłaściwa jest zbieżna, i jeżeli jest to ją oblicz:

$$\int_0^\infty x^3\, e^{-x}\, dx.$$

Rozwiązanie: Weźmy dowolne $M > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^M x^3\, e^{-x}\, dx &= \int_0^M x^3 \left(- e^{-x}\right)' dx \\
&= -x^3\, e^{-x}\Big|_0^M + 3\int_0^M x^2\, e^{-x}\, dx \\
&= -M^3\, e^{-M} + 3\int_0^M x^2 \left(- e^{-x}\right)' dx \\
&= -M^3\, e^{-M} - 3\, x^2\, e^{-x}\Big|_0^M + 6\int_0^M x\, e^{-x}\, dx \\
&= -M^3\, e^{-M} - 3\, M^2\, e^{-M} + 6\int_0^M x \left(- e^{-x}\right)' dx \\
&= -M^3\, e^{-M} - 3\, M^2\, e^{-M} - 6\, x\, e^{-x}\Big|_0^M + 6\int_0^M e^{-x}\, dx \\
&= -M^3\, e^{-M} - 3\, M^2\, e^{-M} - 6\, M\, e^{-M} - 6\, e^{-x}\Big|_0^M \\
&= -e^{-M}(M^3 + 3\, M^2 + 6\, M + 6) + 6 \xrightarrow{M\to\infty} 6.
\end{aligned}$$

Ostatnia granica wynika z reguły de l'Hôpitala.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz całkę:

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\log x}}.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez podstawienie:

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\log x}} = \left\{ \begin{array}{c} t = 1+\log x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left.\frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}}\right|_1^4 = 2\,(\sqrt{4}-\sqrt{1}) = 2.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Parabola $y = \frac{x^2}{2}$ dzieli koło $x^2 + y^2 = 8$ na dwie części. Oblicz pole górnej części.
Rozwiązanie: Znajdźmy punkty przecięcia obu krzywych:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} &= \sqrt{8 - x^2} \\ \frac{x^4}{4} &= 8 - x^2 \\ x^4 + 4x^2 - 32 &= 0. \end{aligned}$$

Niech $t = x^2$:

$$t^2 + 4t - 32 = 0$$
$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 128}}{2} = -2 \pm \sqrt{4 + 32} = -2 \pm 6.$$

Interesuje nas $t \geq 0$, więc $t = 4$ a więc $x = \pm 2$.

$$S = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{8 - x^2}\, dx - \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{2}\, dx.$$

Obie całki liczymy osobno:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} \sqrt{8 - x^2}\, dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = \sqrt{8} \sin t \\ dx = \sqrt{8} \cos t\, dt \end{array} \right\} \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8} \cos t \sqrt{8} \cos t\, dt \\ &= 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\, dt \\ &= 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2t + 1}{2}\, dt \\ &= 8 \left(\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 8 \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \right) \\ &= 2\pi + 4. \end{aligned}$$

Albo (jeśli ktoś lubi inaczej):

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \sqrt{8-x^2}\,dx &= \int_{-2}^{2} \frac{8-x^2}{\sqrt{8-x^2}}\,dx \\
&= 8\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}} - \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{8-x^2}}\,dx \\
&= 8\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{-2}^{2} x\left(\sqrt{8-x^2}\right)'\,dx \\
&= 8\,\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + x\sqrt{8-x^2}\Big|_{2}^{2} - \int_{-2}^{2} \sqrt{8-x^2}\,dx \\
&= 8\cdot\frac{\pi}{2} + 8 - \int_{-2}^{2} \sqrt{8-x^2}\,dx \\
&\Longrightarrow \int_{-2}^{2} \sqrt{8-x^2}\,dx = 2\pi + 4.
\end{aligned}
$$

Druga całka:

$$\int_{-2}^{2} \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^3}{6}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{6}\,(8+8) = \frac{8}{3}.$$

W końcu:

$$S = 2\pi + 4 - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}.$$