

Funkcje zespolone.*Liczby zespolone***Zadanie 1.** Znaleźć moduł i argument liczby:

(1) $z = 4 + 3i$;

(3) $z = 4 - 3i$;

(5) $z = -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$;

(2) $z = -7 - i$;

(4) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$;

(6) $z = -\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}$.

Zadanie 2. Zapisać w postaci trygonometrycznej i wykładniczej.

(1) -2 ;

(5) $-i$;

(2) $2i$;

(6) $-1 - i\sqrt{3}$;

(3) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$;

(7) $5 + 3i$.

(4) $1 - \sin \alpha + i \cos \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$);

Zadanie 3. Obliczyć:

(1) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$;

(3) $(\sqrt{3} - 3i)^6$;

(2) $(2 - 2i)^7$;

(4) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$.

Zadanie 4. Rozwiązać równania:

(1) $z^4 = -1$;

(3) $z^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$;

(2) $z^2 = i$;

(4) $z^5 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$.

Zadanie 5. Znaleźć zbiór D punktów z na płaszczyźnie taki że dla $z \in D$ mamy:

(1) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$;

(5) $|z| + \operatorname{Re} z < 1$;

(2) $|z^2 - 1| \geq a^2$, $a > 0$;

(6) $\operatorname{Im} \bar{z}^2 < 1$;

(3) $1 \leq |z + 2 + i| \leq 2$;

(7) $\operatorname{Im} z^2 = 2$;

(4) $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$;

(8) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$;

(9) $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$.

*Funkcje elementarne***Zadanie 6.** Znaleźć części rzeczywistą i zespoloną funkcji:

(1) $w = e^{-z}$;

(3) $w = \sin z$;

(2) $w = e^{z^2}$;

(4) $w = \operatorname{ch}(z - i)$;

(5) $w = \operatorname{tg} z$.

Zadanie 7. Znaleźć moduł i argument funkcji $w(z)$ we wskazanych punktach:

(1) $w = \cos z$, $z_1 = \frac{\pi}{2} + i \ln 2$, $z_2 = \pi + i \ln 2$;

(3) $w = ze^z$, $z_0 = \pi i$.

(2) $w = \operatorname{sh} z$, $z_0 = 1 + i\frac{\pi}{2}$;

Zadanie 8. Znaleźć:

(1) i^i ;

(2) $i^{\frac{1}{i}}$;

(4) $(-1)^{\sqrt{2}}$;

(3) 1^i ;

(5) $(1-i)^{3-3i}$.

Zadanie 9. Rozwiązać równania:

(1) $\sin z = 3$;

(3) $4 \cos z + 5 = 0$;

(2) $e^z + i = 0$;

(4) $\operatorname{ch} z = i$.