

Pochodne cząstkowe funkcji. Różniczka funkcji.**Zadanie 1.** Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu.

$$\begin{array}{lll}
 (1) u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2 & (3) u = xy + \frac{x}{y} & (5) u = \frac{x}{y^2} \\
 (2) u = \ln(x + y^2) & (4) u = \arctan \frac{y}{x} & (6) u = x^y
 \end{array}$$

Zadanie 2. Napisać różniczki pierwszego i drugiego rzędu podanych funkcji.

$$\begin{array}{ll}
 (1) u = x^m y^n & (3) u = e^{xy} \\
 (2) u = \frac{x}{y} & (4) u = \sqrt{x^2 + y^2}
 \end{array}$$

Zadanie 3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

$$\begin{array}{ll}
 (1) (1.02)^4 \cdot (0.97)^2 & (3) (1.04)^{3.01} \\
 (2) \sqrt{(1.02)^2 + (1.97)^3} & (4) 1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3
 \end{array}$$

Zadanie 4. Napisać równania płaszczyzn stycznych we wskazanych punktach.

$$\begin{array}{ll}
 (1) z = x^2 + y^2, M_0(1, 2, 5) & (3) z = x^y, M_0(2, 4, 16) \\
 (2) z = \frac{\arctan x}{1+y^2}, M_0(1, 0, \frac{\pi}{4}) & (4) z = x^2 + 2y^2 + 3xy, M_0(1, 2, 15)
 \end{array}$$

Pochodne cząstkowe funkcji złożonych. Pochodna kierunkowa funkcji.**Zadanie 5.** Obliczyć podane pochodne cząstkowe dla wskazanych funkcji:

$$\begin{array}{ll}
 (1) z'(x), z = F(x, y(x)) & (3) \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z = (x^2 + y^2)e^{\frac{(x^2+y^2)}{xy}} \\
 (2) \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, z = F(x(v), y(u)) & (4) \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, z = F(t(u, v))
 \end{array}$$

Zadanie 6. Obliczyć gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach.

$$\begin{array}{ll}
 (1) f = x^2 - y^2, M_0(1, 1) & (3) f = \sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2}), M_0(3, 4) \\
 (2) f = x^3 + y^3, M_0(-1, 1) & (4) f = \frac{xy^2}{z^3}, M_0(16, -3, 2)
 \end{array}$$

Zadanie 7. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

$$\begin{array}{ll}
 (1) f = x^2 - y^2, M_0(1, 1), \vec{l} = (\sqrt{3}, 1) & (3) f = e^{x+y}, M_0(1, -1), \vec{l} = (1, 1) \\
 (2) f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, M_0(1, 2), \vec{l} = (1, -\sqrt{3}) & (4) f = (x^3 + y^3 + z^3)^{1/3}, M(3, 4, 5), \vec{l} = (-1, 1, 1)
 \end{array}$$

Zadanie 8. Wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ w punkcie $(0, 0)$. Sprawdzić, czy jest ona różniczkowalna w tym punkcie.**Zadanie 9.** Pokazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dla } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{dla } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

ciągle w otoczeniu $(0, 0)$ i ma ograniczone pochodne cząstkowe. Czy jest ona różniczkowalna w punkcie $(0, 0)$?**Zadanie 10.** Pokazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dla } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{dla } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

ma w punkcie $(0, 0)$ nieciągłe pochodne cząstkowe. Czy jest ona różniczkowalna w punkcie $(0, 0)$?