

Całki podwójne.

Zadanie 1. Obliczyć dane całki podwójne po wskazanych prostokątach

- | | | |
|--|---|---|
| (1) $\iint_R y^3 e^{x^2} dx dy$, gdzie $R = [0, 2] \times [-1, 1]$; | (3) $\iint_R \sin(x - y) dx dy$, gdzie $R = [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, \frac{\pi}{3}]$; | (5) $\iint_R \frac{dx dy}{(x+y+1)^3}$, gdzie $R = [0, 2] \times [-1, 1]$; |
| (2) $\iint_R \frac{x}{y^2} dx dy$, gdzie $R = [1, 2] \times [4, 6]$; | (4) $\iint_R \left(\frac{2y^2}{x^3} + \frac{3x}{y} \right) dx dy$, gdzie $R = [1, 3] \times [1, e]$; | (6) $\iint_R x \sin(xy) dx dy$, gdzie $R = [0, 2] \times [-1, 1]$. |

Zadanie 2. Całkę podwójną $\iint_D f(x, y) dx dy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi o podanych równaniach:

- | | |
|--------------------------------|---|
| (1) $y = x^2, y = 1$; | (5) $x^2 + y^2 = 4, y = 2x - x^2, x = 0, (x, y \geq 0)$. |
| (2) $xy = 6, x + y = 7$; | (6) $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 51 = 0$. |
| (3) $x = y^2, x = y^2/2 + 1$; | |
| (4) $x^2 + y = 2, y^3 = x^2$; | |

Zadanie 3. W podanych całkach iterowanych zmienić kolejność całkowania:

- | | |
|--|---|
| (1) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$; | (4) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy$; |
| (2) $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2-x}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy$; | (5) $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$; |
| (3) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$; | (6) $\int_1^3 dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$; |
| | (7) $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$; |

Zadanie 4. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

- | | |
|--|--|
| (1) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, gdzie $D : x^2 + y^2 \leq a^2$; | (3) $\iint_D \frac{dx dy}{(1-x^2-y^2)^2}$, gdzie $D : x^2 + y^2 \leq x, x^2 + y^2 \leq y$; |
| (2) $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, gdzie $D : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$; | (4) $\iint_D (x + y) dx dy$, gdzie $D : x^2 + y^2 = x + y$. |

Zadanie 5. Obliczyć pola obszarów ograniczonych podanymi krzywymi:

- | | |
|--|---|
| (1) $y = x^2 - x, y = x$; | (5) $y = e^x, y = \ln x, x + y = 1, x = 2$; |
| (2) $y^2 = 4x, x + y = 3, y = 0 (y \geq 0)$; | (6) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), x^2 + y^2 \geq a^2$; |
| (3) $x^2 + y^2 - 2y = 0, x^2 + y^2 - 4y = 0$; | (7) $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$. |
| (4) $x + y = 4, x + y = 8, x - 3y = 0, x - 3y = 5$; | |

Zadanie 6. Obliczyć objętości brył ograniczonych podanymi powierzchniami:

- | | |
|---|---|
| (1) $x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 3, z = 0$; | (4) $z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0$; |
| (2) $x = 0, y = 1 - x , z = 0, z = 10 - 5x - 2y$; | (5) $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$; |
| (3) $x^2 + y^2 - 2y = 0, z = x^2 + y^2, z = 0$; | (6) $z^2 = xy, x^2 + y^2 = a^2$; |