

**Równania różniczkowe rzędu pierwszego (2).***Równania zupełne*

**Zadanie 1.** W podanych równaniach dobierz stałą  $a$  tak, aby było ono zupełne, a następnie rozwiąż je:

(1)  $t + ye^{2ty} + ate^{2ty}y' = 0;$

(2)  $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{at+1}{y^3}y' = 0;$

**Zadanie 2.** Znajdź wszystkie funkcje  $f(t)$ , dla których równanie  $y^2 \sin t + yf(t)\frac{dy}{dt} = 0$  jest zupełne. Rozwiąż równanie dla tych  $f$ .

**Zadanie 3.** Równanie liniowe niejednorodne  $y' + a(t)y = b(t)$  nie jest zupełne. Znajdź czynnik całkujący.

**Zadanie 4.** Rozwiązać równania w postaci różniczek zupełnych:

(1)  $2tydt + (t^2 - y^2)dx = 0;$

(2)  $e^{-y}dt - (2y + te^{-y})dx = 0.$

**Zadanie 5.** Sprawdź, że podana funkcja  $\mu(y, t)$  jest czynnikiem całkującym danego równania. Rozwiąż równanie.

(1)  $6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0, \mu(x, y) = y^2;$

(3)  $y(x+y+1)dx + (x+2y)dy = 0, \mu(x, y) = e^x.$

(2)  $-y^2dx + (x^2 + xy)dy = 0, \mu(x, y) = \frac{1}{x^2y};$

**Zadanie 6.** Równanie różniczkowe może mieć więcej niż jeden czynnik całkujący. Udowodnij, że  $\mu_1(x, y) = \frac{1}{xy}$ ,  $\mu_2(x, y) = \frac{1}{y^2}$ ,  $\mu_3(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$  są czynnikami całkującymi równania  $ydx - xdy = 0$ . Uzasadnij, że otrzymane przy pomocy tych czynników całkujących rozwiązania są formalnie równoważne.

**Zadanie 7.** Scalkować równania metodą czynnika całkującego:

(1)  $(\frac{x}{y} + 1)dx + (\frac{x}{y} - 1)dy = 0;$

(2)  $(x^2 + y)dx - xdy = 0;$

(3)  $(y + x^2)dy + (x - xy)dx = 0.$

**Zadanie 8.** Równanie postaci  $y' + a(t)y = b(t)y^2 + f(t)$ , gdzie  $a, b, f$  są danymi funkcjami, nazywa się równaniem Riccatiego. Nie istnieje ogólny sposób całkowania tego równania. Udowodnij, że jeżeli znamy jedno rozwiązanie  $x_1(t)$ , to funkcja  $u(t) = x(t) - x_1(t)$  spełnia równanie Bernoulliego.

**Zadanie 9.** Znaleźć rozwiązania szczególne następujących równań Riccatiego, zredukować je do równań typu Bernoulliego i scalkować:

(1)  $t^2x' + tx + t^2x^2 = 4;$

(2)  $x' + 2xe^t - x^2 = e^{2t} + e^t.$