Równania różniczkowe drugiego rzędu.

Równania sprowadzalne do równań rzędu pierwszego.

Zadanie 1. Wyznaczyć rozwiązania podanych równań:

(1) $y''(1+x^2) = 1$;
(2) $xy'' - y' = e^x x^2$;
(3) $xy'' = y'(\ln y' - \ln x)$;
(4) $y'' + 2y' = (y')^2 e^x$;
(5) $yy'' - (y')^2 = y'$;
(6) $(1+y^2)y'' = 2y(y')^2$.

Równania liniowe jednorodne drugiego rzędu.

Zadanie 2. Wyznaczyć rozwiązania ogólne podanych równań, jeżeli znane jest jedno z ich rozwiązań:

(1) $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1-x)y = 0,\ y_1(x) = e^x$;
(2) $y'' - \frac{y'}{x} = 0,\ y_1(x) = 1$;
(3) $xy'' - (x+1)y' + y = 0,\ y_1(x) = x+1$;
(4) $xy'' - y' + 4x^3 y = 0,\ y_1(x) = \sin(x^2)$.

Zadanie 3. Rozwiązać podane równania różniczkowe:

(1) $y'' - 2y = 0$;
(2) $y'' - y' + y = 0$;
(3) $y'' + y' - 2y = 0$;
(4) $y'' - 4y' + 4y = 0$;
(5) $y'' + 9y = 0$;
(6) $y'' + y' = 0$.

Zadanie 4. Znajdź rozwiązania następujących zagadnień:

(1) $y'' + y' - 10y = 0,\ y(1) = 5,\ y'(1) = 2$;
(2) $y'' + y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2$;
(3) $2y'' - y' + 3y = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 1$;
(4) $9y'' + 6y' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Zadanie 5. Niech $y_1(x), y_2(x)$ będą rozwiązaniami równania $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, gdzie $p(x)$ i $q(x)$ są ciągłe w pewnym przedziale $[\alpha, \beta]$. Oznaczmy

$$W(x) := W[y_1(x), y_2(x)] = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

(1) Poprzez bezpośredni rachunek sprawdź, że $W' + p(x)W = 0$.
(2) Na podstawie poprzedniego punktu wywnioskuj, że dla każdych $x, x_0 \in [\alpha, \beta]$ jest prawdziwa równość $W[y_1(x), y_2(x)] = W[y_1(x_0), y_2(x_0)] \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right)$.
(3) Udowodnij, że wyznacznik Wrońskiego $W[y_1(x), y_2(x)]$ jest albo tożsamościowo równy 0 lub nigdy nie zeruje się na przedziale $[\alpha, \beta]$.

Zadanie 6. Załóżmy, że wyznacznik Wrońskiego rozwiązań równania $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ jest stały (niezależny od x) i różny od 0. Udowodnij, że $p(x) \equiv 0$.

Zadanie 7. Sprawdź, że $W[e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x] = \beta e^{2\alpha x}$.

Zadanie 8. Równanie postaci $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$, α, β — stałe, nazywa się *równaiem Eulera*. Udowodnij, że funkcja $y(x) = x^r$ jest rozwiązaniem tego równania o ile $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$.

(1) Znajdź rozwiązanie ogólne równania $x^2y'' + 5xy' - 5y = 0$.
(2) Znajdź rozwiązanie zagadnienia $x^2y'' - xy' - 2y = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1$ na przedziale $0 < x < \infty$.