ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 14 № 3 2008

УДК 517.51

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

А. Г. Бабенко[1], **Ю. В. Крякин**[2]

Доказано, что величина $E_{n-1}(\chi_h)_L$ наилучшего интегрального приближения на периоде $[-\pi,\pi)$ характеристической функции χ_h интервала $(-h,h)$ тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$ выражается через нули функции Бернштейна $\cos[nt-\lambda(t,q)]$, где $\lambda(t,q)=\arccos\frac{2q-(1+q^2)\cos t}{1+q^2-2q\cos t}$, $t\in[0,\pi]$, $q\in(-1,1)$. При этом параметры q,h,n связаны между собой специальным образом; в частности, $q=\sec\frac{\pi}{n}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ при $h=\frac{\pi}{n}$.

И далее по тексту. Посмотреть, может сделать везде \pi/n без дроби? На авт. усм.

1. История вопроса

Данная статья и предыдущая работа авторов [2] инициированы, на п... вопросом: *“Чему равно наилучшее приближение в L_1 нормированной характеристической функции (с интегралом равным 1) интервала $\left(-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}\right)$ тригонометрическими полиномами степени $n-1$ на периоде*[3] $\mathbb{T}=[-\pi,\pi)$?”. Ответ оказался нетривиальным, он сформулирован в параграфе 6 (см. формулы (6.19), (6.20)) в терминах первых двух нулей функции Бернштейна $\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}(t,q,0)$, определенной формулами (4.8)–(4.10), со значением $q=\sec\frac{\pi}{n}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

В [2] получены оценки сверху для $E_{n-1}(\chi_h)_L$ при $0<h\le\pi$ и доказана их точность, когда h есть любой нуль функции $\cos nt$ из $(0,\pi)$. Случай произвольного h привел нас к вопросу о сигнум-функциях, ортогональных пространству $\mathcal{T}_{n-1}$ (см. определения и обозначения параграфа 2). Ответ на этот вопрос является ключевым при решении задачи о точном значении величины $E_{n-1}(\chi_h)_L$ при $0<h<\pi$. После того, как основной результат (теорема 5) был получен, нам стало известно, что тригонометрические полиномы, нули которых дают опи-...жного класса сигнум-функций (см. теорему 4 и замечание 1), возникли в исследо-... Я.Л.Геронимуса [6, 7, 22, 23] и Ф.Пейерсторфера [25, 26]. Однако, в параграфе 5 мы приводим другое элементарное доказательство теоремы 4, которое, как нам кажется, имеет самостоятельный интерес. В идейном плане указанное доказательство близко по духу к доказательству [12, с. 329–349] А.Н.Коркина и Е.И.Золотарева (1873) результата о наилучшем интегральном приближении на $[-1,1]$ функции x^n пространством $\mathcal{P}_{n-1}$ многочленов степени не выше $n-1$. Методы Коркина–Золотарева были развиты в работах В.Э.Гейта (см. статью [5] и ее библиографию). Использование теоремы 4, как основного инструмента для вычисления $E_{n-1}(\chi_h)_L$ при всех $h\in(0,\pi)$, приводится в параграфе 6.

Отбить везде пробелом

В [2] содержится краткая история вопроса приближения индивидуальных функций в интегральной метрике, в дополнение к которой приведем еще несколько известных фактов, имеющих непосредственное отношение к теме данной заметки, акцентируя внимание на результаты, относящиеся к приближению ступенчатых функций.

[1]Исследования первого автора поддержаны РФФИ (проект N 08-01-00213), Интеграционным проектом фундаментальных научных исследований, выполняемых в УрО РАН совместно с учеными СО РАН, и Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–1071.2008.1).

[2]Исследования второго автора поддержаны правительством Польши (грант 201 016 31/1206).

[3]Период $\mathbb{T}=\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ удобно интерпретировать как окружность единичного радиуса или как полуинтервал $[\alpha,\alpha+2\pi)$ с отождествленными концами, часто в качестве левого конца указанного полуинтервала используется число $\alpha=-\pi$.

В 1853 году П.Л.Чебышев [18, с. 611–648] решил задачу наилучшего равномерного приближения на отрезке функции x^n пространством $\mathcal{P}_{n-1}$. Е.И.Золотарев (1868) [10, с. 1–59] исследовал задачу равномерного приближения на $[-1,1]$ функции $x^n - qx^{n-1}$, $q \in \mathbb{R}$ пространством $\mathcal{P}_{n-2}$. Он (1877) [10, с. 45–59, задача IV] решил также задачу, которая здесь приводится почти[4] дословно: *найти несократимую рациональную дробь $y = \varphi(x)/\psi(x)$, у которой одна из функций φ, ψ есть многочлен степени n, а другая — степени не выше n, так, чтобы, во-первых, при значениях x, заключенных между 1 и $1/k$, где k — некоторое данное количество, меньшее единицы, y превосходил единицу, а при значениях между -1 и $-1/k$, y был меньше -1, во-вторых, чтобы наибольшее отклонение от нуля этой дроби, когда x содержится в тех же пределах, было, по возможности, меньше.*

В приложениях к книге [18, с. 872] (см. [1, с. 319–320, задача 35]) утверждается, что задача Золотарева в существенном совпадает с такой задачей: *из всех несократимых дробей вида φ/ψ, где $\varphi \in \mathcal{P}_n$, $\psi \in \mathcal{P}_{n+1}$, $\deg\varphi = n$, $\deg\psi = n+1$ найти ту, которая наименее уклоняется от функции $\operatorname{sgn} x$ на множестве $[-1,-a]\bigcup[a,1]$, где $0 < a < 1$ в равномерной метрике.* Недавно полиномиальный аналог этой задачи ($\psi \equiv 1$) был рассмотрен в [21].

В работе [27] приводится несколько точных результатов Берлинга 1930-х годов, Сельберга (1974) и Ваалера по интегральному (в том числе, одностороннему) приближению целыми функциями на $\mathbb{R}$ ступенчатых функций $\operatorname{sgn} x$ и характеристической функции интервала; а также их приложения — короткого доказательства известных результатов теории чисел, которые установили ранее Мангомери, Ваугхан, Эрдеш, Туран и другие математики.

Точные результаты по L-аппроксимации характеристической функции сферической шапки на многомерной евклидовой сфере многочленами степени не выше заданной по совокупности переменных получены недавно М.В.Дейкаловой [9].

2. Обозначения и определения

$\mathcal{T}_n$ — пространство тригонометрических полиномов $g(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt + b_k\sin kt)$ степени не выше n с вещественными коэффициентами;

$\mathcal{P}_n$ — пространство алгебраических многочленов $p(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k$ степени не выше n $(\deg p \le n)$ с вещественными коэффициентами;

$L = L(\mathbb{T})$ — пространство 2π-периодических интегрируемых по Лебегу функций $f : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_L = \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt$;

$\mathcal{T}_{n-1}^{\perp}$ — множество функций $\varphi \in L$, ортогональных пространству $\mathcal{T}_{n-1}$, т.е. множество таких функций $\varphi \in L$, для которых $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cdot g(t)\,dt = 0$ при всех $g \in \mathcal{T}_{n-1}$;

$E_{n-1}(f)_L = \min\{\|f-g\|_L : \ g \in \mathcal{T}_{n-1}\}$ — величина наилучшего интегрального приближения функции $f \in L$ пространством $\mathcal{T}_{n-1}$;

$C_{2\pi} = C(\mathbb{T})$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций $f : \ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой $\|f\|_{C_{2\pi}} = \max\{|f(t)| : \ t \in \mathbb{T}\}$;

$L_\infty = L_\infty(\mathbb{T})$ — пространство 2π-периодических измеримых существенно ограниченных на $\mathbb{T}$ функций $f : \ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{L_\infty} = \sup\operatorname{vrai}\{|f(t)| : \ t \in \mathbb{T}\}$.

Ниже приводятся определения, которые несколько отличаются по форме от соответствующей терминологии, используемой в [26, с. 62, определение 2], [20, гл 3, §10, с. 84].

Определение 1. Пусть $\{t_j\}_{j=1}^{r}$ — набор, состоящий из r попарно различных точек $t_1 < t_2 < \cdots < t_r \ (< t_1 + 2\pi)$. Функцию $\sigma(t) = \varepsilon\sum_{j=1}^{r+1}(-1)^j\chi_{(t_j,t_{j+1})}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называют *сигнум-функцией*, отвечающей набору $\{t_j\}_{j=1}^{r}$; здесь $\varepsilon = \pm 1$, $t_{r+1} = t_1 + 2\pi$, $\chi_{(t_j,t_{j+1})}$ — характеристическая функция интервала (t_j, t_{j+1}), 2π-периодически продолженная на $\mathbb{R}$.

Определение 2. Если набор $\{t_j\}_{j=1}^{r}$ точек $t_1 < t_2 < \cdots < t_r \ (< t_1 + 2\pi)$ является таким, что отвечающая ему сигнум-функция σ принадлежит $\mathcal{T}_{n-1}^{\perp}$, т.е. $\int_{-\pi}^{\pi}\sigma(t)\cdot g(t)\,dt = 0$ при всех $g \in \mathcal{T}_{n-1}$, то этот набор называется *каноническим* для $\mathcal{T}_{n-1}$.

[4] В оригинале вместо термина “многочлен” используется термин “целая функция”.

3. Несколько утверждений общего характера теории L-аппроксимации

В 1898 году А.А.Марков доказал [13, с. 216, 225, 226], что наборы нулей функций $\cos nt$, $\sin nt$, расположенные на периоде $[-\pi, \pi)$, являются каноническими для $\mathcal{T}_{n-1}$, т.е.

Индексы над интегралом в выключенных формулах везде по тексту

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}\{\cos nt\} \cdot g(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}\{\sin nt\} \cdot g(t)\, dt = 0 \quad \text{при всех} \quad g \in \mathcal{T}_{n-1}. \tag{3.1}$$

... того, он установил [13, с. 146–230], что задача построения канонических наборов для ... сно связана с задачей интегрального приближения функций из $C_{2\pi}$ пространством $\mathcal{T}_{n-1}$ на периоде (см. [1, гл. II, пункт 50], [20, гл 3, §10, с. 84, теорема 10.5]).

Теорема 1 (А.А.Марков). *Пусть* $\{t_j\}_{j=1}^{r}$ *— набор точек* $t_1 < t_2 < \cdots < t_r\,(< t_1 + 2\pi)$ *является каноническим для* $\mathcal{T}_{n-1}$. *Если полином* $g_0 \in \mathcal{T}_{n-1}$ *интерполирует функцию* f *из* $C_{2\pi}$ *в точках* t_j, $j = 1, 2, \ldots, r$, *разность* $f - g_0$ *меняет знак в этих точках и не имеет других точек перемен знака на любом полуинтервале* $[\alpha, \alpha + 2\pi)$, *содержащем набор* $\{t_j\}_{j=1}^{r}$, *то полином* g_0 *является полиномом наилучшего интегрального приближения для* f, *причем* $E_{n-1}(f)_L = \|f - g_0\|_L = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \operatorname{sgn}\{f(t) - g_0(t)\}\, dt\right|$.

Теорема 2. *Для того чтобы полином* $g_0 \in \mathcal{T}_{n-1}$ *доставлял наилучшее интегральное приближение функции* $f \in L$, *достаточно, а в случае, когда множество точек* $t \in \mathbb{T}$, *в которых* $f(t) = g_0(t)$, *имеет меру ноль, и необходимо выполнение свойства принадлежности функции* $\operatorname{sgn}[f(t) - g_0(t)]$ *множеству* $\mathcal{T}_{n-1}^{\perp}$. *При выполнении этого свойства имеют место равенства* $E_{n-1}(f)_L = \|f - g_0\|_L = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \operatorname{sgn}\{f(t) - g_0(t)\}\, dt\right|$.

Доказательство теоремы 2 базируется на соотношениях двойственности С.М.Никольского (1946) [15, с. 213–214, следствие 2] (см. [11, предложение 2.5.2, теорема 3.3.2]).

Ф.Пейерсторфер (1979) [25, с. 262, теорема 2] нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы набор $\{t_j\}_{j=1}^{2r}$ точек $t_1 < t_2 < \cdots < t_{2r}\,(< t_1 + 2\pi)$ являлся каноническим для $\mathcal{T}_{n-1}$. Существенный вклад в эту проблематику внес Я.Л.Геронимус [6, 7, 22].

Теорема 3 (F.Peherstorfer). *Пусть* $r, n \in \mathbb{N}$, $r \geq n$ *и* $g \in \mathcal{T}_r$ *— тригонометрический полином вида* $g(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{r-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + A \cos rt + B \sin rt$, $A^2 + B^2 > 0$. *Тогда следующие два условия:* (1) *число перемен знака полинома* g *на периоде* $\mathbb{T}$ *равно* $2r$; (2) *набор нулей* $t_1 < t_2 < \cdots < t_{2r}$ $(< t_1 + 2\pi)$ *полинома* g, *является каноническим для* $\mathcal{T}_{n-1}$; *выполняются тогда и только тогда, когда существует многочлен*[5]

$$p(z) = \prod_{j=1}^{r-n} (z - z_j), \quad \text{все } |z_j| < 1, \quad z_j \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C},$$

такой что[6] $g(t) = \Re\left\{(A - iB) z^{2n-r} p^2(z)\right\}$ *при* $z = e^{it}$, $t \in \mathbb{T}$.

Из теоремы 3 следует, что два семейства канонических для $\mathcal{T}_{n-1}$ наборов с количеством точек равным $2n$ и $2n+2$ характеризуются соответственно нулями функций $\cos n(t+\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ и (см. 2-ю часть формулы (4.10), а также 1-й абзац параграфа 5 и теорему 4) нулями полиномов вида $aR_{q,0}(t+\theta) + bR_{q,\pi/2}(t+\theta)$, где $a, b, \theta \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 > 0$, $q \in (-1, 1)$, полином $R_{q,\xi}$ задается формулой $R_{q,\xi}(t) = \cos[(n+1)t + \xi] - 2q\cos(nt + \xi) + q^2 \cos[(n-1)t + \xi]$.

В параграфе 7 найдено представление (7.17) полинома $R_{q,\xi}(t)$ в терминах функции Бернштейна $\mathcal{B}(t, q, \xi)$, которое содержит в себе полезную информацию о нулях полинома $R_{q,\xi}(t)$.

---

[5] Если у знака произведения нижний индекс больше верхнего, то произведение считается равным 1.

[6] Здесь $\Re z = x$ означает действительную часть комплексного числа $z = x + iy$, а $\Im z = y$ — мнимую.

4. Функция Бернштейна

В 1935 г. Я.Л.Геронимус [22] (см. [23, с. 503, формула (105)]) нашел полином $p_q \in \mathcal{P}_{n-2}$, наилучшего интегрального приближения на $[-1,1]$ для функции $x^n - qx^{n-1}$ при $q \in \mathbb{R}$; тем самым, решил интегральный вариант задачи[7] Е.И.Золотарева. Он нашел явную формулу для разности $G_q(x) = x^n - qx^{n-1} - p_q(x)$, в частности, при $-1 \le q \le 1$ справедлива формула

$$2^n G_q(\cos t)\sin t = \sin(n+1)t - 2q\sin nt + q^2\sin(n-1)t. \tag{4.1}$$

Этот результат тесно связан (см. сноску 9 на с. 5) с результатами С.Н.Бернштейна 1912–1913 годов [3, с. 124–144] о приближении простейшей дроби $\frac{1}{x-a}$, $a > 1$ простр

все строчные дроби д.б. одинаковые, либо оставляем везде дробь с \displaystyle, либо используем знак деления /

в равномерной метрике.

Постановка задачи равномерного приближения функции $f_a(x) = \frac{1}{x-a}$
$\mathcal{P}_n$ принадлежит П.Л.Чебышеву (1892) [19, с. 363–372]. Величину

$$E_n(f_a)_{C[-1,1]} = \inf_{p\in\mathcal{P}_n} \|f_a - p\|_{C[-1,1]}$$

наилучшего равномерного приближения функции f_a пространством $\mathcal{P}_n$
погрешностью [19, с. 364]. Сам П.Л.Чебышев нашел *относительную погрешность* и соответствующий наилучший полином [19, формула (1) на с. 365, §2, с. 366]. То есть, в [19, с. 363–372] им была решена задача[8]

$$\begin{aligned}\inf_{p\in\mathcal{P}_n} \|(f_a - p)/f_a\|_{C[-1,1]} &= \inf_{p\in\mathcal{P}_n} \|1-(x-a)p(x)\|_{C[-1,1]} = \\ &= \frac{2}{(a+\sqrt{a^2-1})^{n+1} + (a-\sqrt{a^2-1})^{n+1}}\end{aligned} \tag{4.3}$$

о величине наилучшего равномерного приближения функции f_a пространством $\mathcal{P}_n$ на $[-1,1]$ с весом $1/f_a$. Здесь $C[-1,1]$ — пространство непрерывных функций $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{C[-1,1]} = \max\{|f(x)| \,:\, x \in [-1,1]\}$.

С.Н.Бернштейн [3, с. 127–135] вычислил абсолютную погрешность (4.2), доказав, что

$$E_n(f_a)_{C[-1,1]} = \frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}. \tag{4.4}$$

Он нашел две формы записи для разности $\Phi_a(x) = f_a(x) - p_a(x)$, где $p_a \in \mathcal{P}_n$ — полином наилучшего равномерного приближения на $[-1,1]$ функции f_a. А именно, *алгебраическую* форму записи, в которой используется обозначение $s(x) = \sqrt{x^2-1}$,

$$\Phi_a(x) = \frac{[ax-1+s(a)s(x)]\,[x+s(x)]^n + [ax-1-s(a)s(x)]\,[x-s(x)]^n}{2s^2(a)[a+s(a)]^n(x-a)} \tag{4.5}$$

и *тригонометрическую* форму записи

$$\Phi_a(\cos t) = \frac{\cos[nt-\delta(t,a)]}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}, \quad \delta(t,a) = \arccos\frac{1-a\cos t}{a-\cos t}. \tag{4.6}$$

Функция $\delta(t,a)$ убывает по t на $[0,\pi]$ и $\delta(0,a) = \pi$, $\delta(\pi,a) = 0$. Отсюда следует, что функция $\varphi(t,a) = nt - \delta(t,a)$ возрастает по t на $[0,\pi]$, причем $\varphi(0,a) = -\pi$, $\varphi(\pi,a) = n\pi$. Разность

[7] Этот результат был переоткрыт Э.М.Галеевым (1975) [4] с применением других подходов.

[8] Как, по-существу, отмечает П.Л.Чебышев [19, с. 364], задача (4.3) равносильна задаче об экстремальной экстраполяции полинома, исследованной им в работе 1881 года [19, с. 108–127]. Указанная задача сводится к задаче поиска максимально возможного значения $p(a)$ в точке $a > 1$ на классе полиномов $p \in \mathcal{P}_n$, у которых равномерная норма на отрезке $[-1,1]$ ограничена единицей.

$\Phi_a(x) = f_a(x) - p_a(x)$ имеет $(n+2)$-точечный альтернанс на $[-1,1]$. Поэтому (см. [14, гл. II, §2, с. 49–58]) p_a является полином наилучшего равномерного приближения функции f_a на $[-1,1]$.

Пусть $t \in [0,\pi]$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in (-\infty,-1) \bigcup (1,+\infty)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Функцию

$$B(t,a,\xi) = \cos\left[nt - \delta(t,a) + \xi\right], \quad \delta(t,a) = \arccos\frac{1 - a\cos t}{a - \cos t} \tag{4.7}$$

назовем *функцией Бернштейна.* Для числа $a \in (-\infty,-1) \bigcup (1,+\infty)$ найдется единственное число $q \in (-1,0) \bigcup (0,1)$, которое связано с ним формулой $a = \dfrac{1}{2}\left(q + \dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{1+q^2}{2q}$. В параграфе 7 показано, что в терминах параметра $q \in (-1,1)$ функция Бернштейна имеет вид

$$B(t,a,\xi) = \mathcal{B}(t,q,\xi) = \cos\left[nt - \lambda(t,q) + \xi\right] = \frac{R_{q,\xi}(t)}{2q\cos t - (1+q^2)}, \quad t \in [0,\pi], \tag{4.8}$$

где

$$\delta(t,a) = \lambda(t,q) = \arccos\frac{2q - (1+q^2)\cos t}{1 + q^2 - 2q\cos t}, \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} R_{q,\xi}(t) &= \cos[(n+1)t + \xi] - 2q\cos(nt+\xi) + q^2\cos[(n-1)t + \xi] = \\ &= \left\{\cos(n+1)t - 2q\cos nt + q^2\cos(n-1)t\right\}\cos\xi - \\ &\quad - \left\{\sin(n+1)t - 2q\sin nt + q^2\sin(n-1)t\right\}\sin\xi. \end{aligned} \tag{4.10}$$

На (4.8) можно смотреть, как на представление полинома $R_{q,\xi}$ через функцию Бернштейна на $[0,\pi]$. Доказательство этого представления на $[0,\pi]$, а также аналогичного представления на $[-\pi,0]$ приведено в параграфе 7 (см. формулу (7.17)). В указанном параграфе изучаются свойства функции (4.8), связанные с ее нулями и точками альтернанса. В частности, доказана теорема 10, с помощью которой приходим к выводу[9], что нули синус-полинома Геронимуса (4.1), расположенные в $(0,\pi)$, совпадают с точками альтернанса функции $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}(t,q,0)$.

5. Одно семейство сигнум-функций

Сопоставим тройке чисел $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $q \in (-1,1)$ многочлен

$$Q_{q,\xi}(z) = e^{i\xi}\left(z^{n+1} - 2qz^n + q^2z^{n-1}\right) = e^{i\xi}z^{n-1}(z-q)^2.$$

Реальная часть этого многочлена при $z = e^{it}$ совпадает с полином $R_{q,\xi}(t)$, определенным формулой (4.10), т.е. $\Re\left\{Q_{q,\xi}\left(e^{it}\right)\right\} = R_{q,\xi}(t) = \cos[(n+1)t+\xi] - 2q\cos(nt+\xi) + q^2\cos[(n-1)t+\xi]$.

При $r = n+1$, $n \in \mathbb{N}$, $A - iB = e^{i\xi}$, $p(z) = z - q$ теорема 3 влечет такое утверждение:

Теорема 4. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $q \in [-1,1]$, $\xi \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}\left\{R_{q,\xi}(t)\right\} \cdot g(t)\,dt = 0 \quad \text{для любого полинома} \quad g \in \mathcal{T}_{n-1}; \tag{5.1}$$

следовательно, $R_{q,\xi}$ не приближается пространством $\mathcal{T}_{n-1}$ в метрике пространства L.

З а м е ч а н и е 1. При $q = 0$ и $q = \pm 1$ утверждение теоремы 4 сводится к утверждению ортогональности пространству $\mathcal{T}_{n-1}$ соответственно знака полиномов $\cos(n+1)t$ и $\cos nt$, установленному А.А.Марковым (см. формулу (3.1) выше). При $-1 < q < 1$ утверждение теоремы 4 было получено Я.Л.Геронимусом (случай $\xi = -\pi/2$) и Ф.Пейерсторфером (общий случай).

Ниже мы приводим свое доказательство теоремы 4, основанное на теореме Виета, рекуррентных формулах Ньютона и формуле Эйлера.

Обозначим через $\mathbb{S} = \left\{z = e^{it} : \ t \in \mathbb{T}\right\}$ единичную окружность комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

---

[9]Этот вывод, как, фактически, отмечается в [26, с. 73, лемма 3], в несколько иной форме содержится в монографии [24, гл. 1, §4, с. 27–43], для его обоснования применялись другие рассуждения.

Лемма 1. *При* $q \in (-1,1)$, $\xi \in \mathbb{R}$ *полином* $R_{q,\xi}$ *имеет* $2n+2$ *различных нулей на* $\mathbb{T}$.

Доказательство. Полином $R_{q,\xi}(t)$ совпадает с $\Re\left\{Q_{q,\xi}\left(e^{it}\right)\right\}$. Все нули многочлена $Q_{q,\xi}(z)$ лежат внутри единичного круга. В силу принципа аргумента (см. [17, гл. I, §1.91, теорема 1.91.1]), когда z пробегает $\mathbb{S}$ один раз, значение $Q_{q,\xi}(z)$ делает $n+1$ оборотов вокруг нуля и, следовательно, $2(n+1)$ раз пересекает мнимую ось, т.е. вещественная часть многочлена $Q_{q,\xi}(e^{it})$ обращается в ноль $2(n+1)$ раз, когда t пробегает период $\mathbb{T}$. □

Доказательство теоремы 4. Можно предполагать, что $0 \le q \le 1$, т.к. случай $-1 \le q \le 0$ сводится к случаю $0 \le q \le 1$ с помощью замены t на $\pi - t$. При $q = 0$ и $q = 1$ утверждение (5.1) справедливо (см. замечание 1), поскольку $R_{0,\xi}(t) = \cos[(n+1)t+\xi]$, $R_{1,\xi}(t) = 2(\cos t - 1)\cos(nt+\xi)$. Осталось рассмотреть случай $0 < q < 1$.

В силу леммы 1 полином $R_{q,\xi}(t)$ имеет на периоде ровно $2n+2$ попарно различных нулей $t_1 < t_2 < \cdots < t_{2n+2}$ $(< t_1 + 2\pi)$. Утверждение (5.1) теоремы 4 равносильно следующему:

$$\int_{t_1}^{t_{2n+3}} \operatorname{sgn}\left\{R_{q,\xi}(t)\right\} \cdot e^{ikt}\,dt = 0 \quad \text{при} \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1, \quad \text{где} \quad t_{2n+3} = 2\pi + t_1.$$

В свою очередь, это утверждение эквивалентно каждому из следующих трех утверждений:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{2n+2} (-1)^\nu \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} e^{ikt}\,dt &= 0 \quad \text{при} \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1;\\
\sum_{\nu=1}^{2n+2} (-1)^\nu \left\{t_{\nu+1} - t_\nu\right\} &= 0, \quad \sum_{\nu=1}^{2n+2} (-1)^\nu \left\{e^{ikt_{\nu+1}} - e^{ikt_\nu}\right\} = 0 \quad \text{при} \quad k = 1,2,\ldots,n-1;\\
\pi + \sum_{j=1}^{n+1} t_{2j-1} - \sum_{j=1}^{n+1} t_{2j} &= 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} e^{ikt_{2j}} - \sum_{j=1}^{n+1} e^{ikt_{2j-1}} = 0 \quad \text{при} \quad k = 1,2,\ldots,n-1. \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства теоремы 4 достаточно установить справедливость системы равенств (5.2). Для этого построим многочлен $P(z) = P_{q,\xi}(z)$ степени $2n+2$, все нули $z_1, z_2, \ldots, z_{2n+2}$ которого расположены на единичной окружности $\mathbb{S}$ и связаны с нулями $t_1 < t_2 < \cdots < t_{2n+2}$ полинома $R_{q,\xi}(t)$ следующим образом:

$$z_1 = e^{it_1},\ z_2 = e^{it_2}, \ldots,\ z_{2n+2} = e^{it_{2n+2}}. \qquad (5.3)$$

Введем обозначение $\varepsilon = e^{-i\xi}$. Для построения указанного многочлена $P(z)$ воспользуемся формулой Эйлера, в силу которой при $z = e^{it}$ имеем

$$\begin{aligned}
P(z) &= P_{q,\xi}(z) = 2\varepsilon z^{n+1} R_{q,\xi}(t) = z^{2n}(z-q)^2 + \varepsilon^2(qz-1)^2 = \\
&= [z^n(z-q)]^2 - [i\varepsilon(qz-1)]^2 = P^+(z)P^-(z), \quad \text{где} \qquad (5.4)\\
P^+(z) &= P^+_{q,\xi}(z) = z^n(z-q) + i\varepsilon(qz-1) = z^{n+1} - qz^n + i\varepsilon qz - i\varepsilon, \qquad (5.5)\\
P^-(z) &= P^-_{q,\xi}(z) = z^n(z-q) - i\varepsilon(qz-1) = z^{n+1} - qz^n - i\varepsilon qz + i\varepsilon. \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

Множитель $2\varepsilon z^{n+1}$ не обращается в ноль на $\mathbb{S}$, поэтому многочлен $P(z)$, определенный равенствами (5.4), обладает свойством (5.3).

Из равенств $P = P^+P^-$, $\deg P^+ = \deg P^- = n+1$ следует, что каждый из многочленов P^+, P^- имеет на $\mathbb{S}$ ровно по $n+1$ попарно различных нулей $z_1^+ = e^{it_1^+}, \ldots, z_{n+1}^+ = e^{it_{n+1}^+}$; $z_1^- = e^{it_1^-}, \ldots, z_{n+1}^- = e^{it_{n+1}^-}$; других нулей в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ у них нет. При этом справедливы соотношения $\{z_1, z_2, \ldots, z_{2n+2}\} = \left\{z_1^+, z_2^+, \ldots, z_{n+1}^+\right\} \bigcup \left\{z_1^-, z_2^-, \ldots, z_{n+1}^-\right\}$, $\{t_1, t_2, \ldots, t_{2n+2}\} = \left\{t_1^+, t_2^+, \ldots, t_{n+1}^+\right\} \bigcup \left\{t_1^-, t_2^-, \ldots, t_{n+1}^-\right\}$.

Для того чтобы понять структуру взаимного расположения нулей многочленов P, P^+, P^-, рассмотрим “начальный” случай $q = 0$. В этом случае имеем $P(z) = z^{2n+2} + \varepsilon^2 = z^{2n+2} + e^{-i2\xi}$.

Отсюда получаем $z_\nu^{2(n+1)} = e^{i2(n+1)t_\nu} = -e^{i2\nu\pi}e^{-i2\xi} = e^{i(2\nu-1)\pi}e^{-i2\xi} = e^{i\cdot[(2\nu-1)\pi-2\xi]}$. Следовательно, нули многочлена $P(z) = P_{0,\xi}(z)$ имеют вид

$$z_\nu = e^{it_\nu}, \quad t_\nu = \frac{(2\nu-1)\pi}{2(n+1)} - \frac{\xi}{n+1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, 2n+2.$$

Найдем нули многочлена $P^+_{0,\xi}(z) = z^{n+1} - i\varepsilon = z^{n+1} - ie^{-i\xi} = z^{n+1} - e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\xi} = z^{n+1} - e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)}$. Имеем $(z_\nu^+)^{n+1} = e^{i(n+1)t_\nu^+} = e^{i2(\nu-1)\pi}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)} = e^{i\cdot\left[2(\nu-1)\pi+\frac{\pi}{2}-\xi\right]} = e^{i\cdot\left[\frac{4\nu-3}{2}\pi-\xi\right]}$, т.е.

$$z_\nu^+ = e^{it_\nu^+}, \quad t_\nu^+ = \frac{(4\nu-3)\pi}{2(n+1)} - \frac{\xi}{n+1} = t_{2\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{5.7}$$

Набор нулей многочлена $P = P_{0,\xi}$ с нечетными номерами совпал с набором набором нулей многочлена $P^+ = P^+_{0,\xi}$. Отсюда следует, что набор нулей многочлена $P = P_{0,\xi}$ с четными номерами совпадает с набором набором нулей многочлена $P^- = P^-_{0,\xi}$, т.е.

$$z_\nu^+ = e^{it_\nu^+} = z_{2\nu-1}, \quad t_\nu^+ = t_{2\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n+1; \tag{5.8}$$

$$z_\nu^- = e^{it_\nu^-} = z_{2\nu}, \quad t_\nu^- = t_{2\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{5.9}$$

Таким образом, при $q = 0$ структура взаимного расположения нулей многочленов P, P^+, P^- ясна. В частности, для нулей многочленов P^+, P^- имеет место свойство перемежаемости.

Свойства (5.8), (5.9) останутся справедливыми и в случае произвольного $q \in (0,1)$. Действительно, рассмотрим, например, свойство перемежаемости. Если бы в какой-то момент $\widehat{q} \in (0,1)$ свойство перемежаемости нарушилось, то, в силу непрерывной зависимости нулей от параметра q, нашлось бы $q^* \in (0, \widehat{q}]$, при котором какой либо из нулей многочлена $P^-_{q^*,\xi}$ совпал бы с каким-либо из нулей многочлена $P^+_{q^*,\xi}$. Но тогда количество различных нулей многочлена $P_{q^*,\xi}$ не превзойдет $2n+1$, что противоречит лемме 1, в силу которой полином $R_{q^*,\xi}(t)$ имеет $2n+2$ различных нулей на $\mathbb{T}$, значит и многочлен $P_{q^*,\xi}$ имеет $2n+2$ различных нулей на $\mathbb{S}$. Следовательно, для нулей многочленов $P = P_{q,\xi}$, $P^+ = P^+_{q,\xi}$, $P^- = P^-_{q,\xi}$ равенства (5.8), (5.9) остаются справедливыми при всех $0 < q < 1$.

Применив теорему Виета для $P^+(z) = z^{n+1} - qz^n + i\varepsilon qz - i\varepsilon$, с учетом (5.8), получим

$$\begin{aligned} -i\varepsilon &= -e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\xi} = e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{-i\xi} = e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\xi\right)} = (-1)^{n+1}\prod_{\nu=1}^{n+1} z_\nu^+ = e^{-i(n+1)\pi}\prod_{\nu=1}^{n+1} z_{2\nu-1} = \\ &= e^{-i(n+1)\pi}\prod_{\nu=1}^{n+1} e^{it_{2\nu-1}} = \exp\left\{i\left[-(n+1)\pi + \sum_{\nu=1}^{n+1} t_{2\nu-1}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство

$$-\frac{\pi}{2} - \xi = -(n+1)\pi + \sum_{\nu=1}^{n+1} t_{2\nu-1}. \tag{5.10}$$

Аналогично, применив теорему Виета для $P^-(z) = z^{n+1} - qz^n - i\varepsilon qz + i\varepsilon$, с учетом (5.9), придем к равенству

$$\frac{\pi}{2} - \xi = -(n+1)\pi + \sum_{\nu=1}^{n+1} t_{2\nu}. \tag{5.11}$$

Вычитая из (5.10) равенство (5.11), получим равенство, эквивалентное 1-му равенству в (5.2).

Обозначим через

$$s_k^+ = \sum_{\nu=1}^{n+1} (z_\nu^+)^k = \sum_{\nu=1}^{n+1} e^{ikt_{2\nu-1}}, \quad s_k^- = \sum_{\nu=1}^{n+1} (z_\nu^-)^k = \sum_{\nu=1}^{n+1} e^{ikt_{2\nu}}, \quad k = 1, \ldots, n-1 \tag{5.12}$$

суммы k-х степеней нулей многочленов $P^+(z) = z^{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n+1} a_\ell^+ z^{n+1-\ell} = z^{n+1} - qz^n + i\varepsilon qz - i\varepsilon$, $P^-(z) = z^{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n+1} a_\ell^- z^{n+1-\ell} = z^{n+1} - qz^n - i\varepsilon qz + i\varepsilon$ соответственно.

Для доказательства 2-й группы равенств в (5.2) применим рекуррентные формулы Ньютона (см. [8, §90, с. 120–123])

$$s_1^+ + a_1^+ = 0,\ s_2^+ + a_1^+ s_1^+ + 2a_2^+ = 0,\ s_3^+ + a_1^+ s_2^+ + a_2^+ s_1^+ + 3a_3^+ = 0,\ \ldots$$
$$\ldots,\ s_{n-1}^+ + a_1^+ s_{n-2}^+ + a_2^+ s_{n-3}^+ + \cdots + a_{n-2}^+ s_1^+ + (n-1)a_{n-1}^+ = 0,$$

которые позволяют выразить s_k^+ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$ через $a_1^+ = -q$, $a_2^+ = 0$, $\ldots$, $a_{n-1}^+ = 0$ — коэффициенты многочлена P_q^+. Таким образом, находим $s_k^+ = q^k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Точно также найдем $s_k^- = q^k$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Следовательно, $s_k^- - s_k^+ = 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Эти равенства вместе с (5.12) влекут 2-ю группу равенств в (5.2). □

З а м е ч а н и е 2. Из формул (5.5), (5.6) следует тождество

$$\left|P_{q,\xi}^+(e^{it})\right|^2 + \left|P_{q,\xi}^-(e^{it})\right|^2 = 4\left(1 + q^2 - 2q\cos t\right), \quad t \in \mathbb{T}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad q \in (-1, 1), \quad n \in \mathbb{N},$$

которое является периодическим аналогом соответствующих утверждений, установленных в работе [12, с. 344, 345] и развитых в статье [5, с. 37, лемма 1].

6. L-приближение функции χ_h тригонометрическими полиномами

Числу $h \in (0, \pi]$ сопоставим характеристическую функцию

$$\chi_h(t) = \chi_{(-h,h)}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < h, \\ 0, & h \le |t| \le \pi \end{cases}$$

интервала $(-h, h)$, периодически продолженную на $\mathbb{R}$ с периодом 2π.

В данном параграфе рассматривается задача вычисления величины $E_{n-1}(\chi_h)_L$ наилучшего интегрального приближения на периоде $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$ функции χ_h пространством $\mathcal{T}_{n-1}$. Иногда мы будем использовать некоторые утверждения из параграфа 7, приведенного ниже.

Для краткости обозначим величину $E_{n-1}(\chi_h)_L$ через $\mathfrak{I}_n(h)$, т.е. положим

$$\mathfrak{I}_n(h) = E_{n-1}(\chi_h)_L \quad \text{при} \quad h \in (0, \pi). \tag{6.1}$$

Из равенства $1 - \chi_h(t) = \chi_{\pi-h}(\pi - t)$ следует, что

$$\mathfrak{I}_n(\pi - h) = \mathfrak{I}_n(h) \quad \text{при} \quad h \in (0, \pi). \tag{6.2}$$

В работе [2, теорема 1.3.1] доказаны утверждения, равносильные следующим:

$$\mathfrak{I}_n(h) = 2h \quad \text{при} \quad 0 \le h \le \frac{\pi}{2n}, \quad n \ge 1, \tag{6.3}$$

$$\mathfrak{I}_n(h) \le \frac{\pi}{n} \quad \text{при} \quad 0 \le h \le \pi, \quad n \ge 1, \tag{6.4}$$

причем неравенство (6.4) обращается в равенство, когда h совпадает с произвольным нулем полинома $\cos nt$, расположенным в интервале $(0, \pi)$, т.е. при $h = h_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Принимая во внимание утверждения (6.2)–(6.4) условимся в дальнейшем два интервала $(0, h_1)$ и (h_n, π) называть *тривиальными участками*, а интервал (h_j, h_{j+1}) при $1 \le j \le n-1$ будем называть *j-м нетривиальным участком*. В частности, интервал $(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n})$ является первым нетривиальным участком при $n \ge 2$.

Пусть $-1 < q < 1$ и $t_j = t_j(q) \in (0, \pi)$ $(j = 1, 2, \dots, n+1)$ — нули полинома[10]

$$R_q(t) = R_{q,0}(t) = \cos(n+1)t - 2q\cos nt + q^2\cos(n-1)t, \tag{6.5}$$

занумерованные в порядке возрастания. Согласно формуле (7.17) параграфа 7 при $\xi = 0$, справедливо следующее представление полинома $R_q(t)$ на отрезке $t \in [0, \pi]$:

$$R_q(t) = \{2q\cos t - (1+q^2)\}\cos\left[nt - \lambda(t,q)\right], \quad \lambda(t,q) = \arccos\frac{2q - (1+q^2)\cos t}{1 + q^2 - 2q\cos t}, \tag{6.6}$$

которое несет в себе содержательную информацию о его нулях $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$ в интервале $(0, \pi)$. В частности (см. утверждение (b) теоремы 10 параграфа 7), каждый из указанных нулей $t_j = t_j(q)$ является непрерывной убывающей функцией параметра $q \in (-1, 1)$. Для того, чтобы выяснить, в каких промежутках изменяются нули полинома R_q, рассмотрим полиномы

$$R_{-1}(t) = (\cos t + 1)\cos nt, \quad R_0(t) = \cos(n+1)t, \quad R_1(t) = (\cos t - 1)\cos nt.$$

Отсюда видно, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Тогда нули $(0 <)\, t_1 < t_2 \cdots < t_{n+1}\, (< \pi)$ полинома R_q непрерывно зависят от параметра q, причем когда q меняется в интервале $(-1, 1)$, первый нуль $t_1 = t_1(q)$, монотонно убывая, пробегает промежуток $\left(0, \frac{\pi}{2n}\right)$, j-й нуль $t_j = t_j(q)$ при $2 \le j \le n$, монотонно убывая, пробегает промежуток $\left(\frac{(2j-3)\pi}{2n}, \frac{(2j-1)\pi}{2n}\right)$, $(n+1)$-й нуль $t_{n+1} = t_{n+1}(q)$, монотонно убывая, пробегает промежуток $\left(\pi - \frac{\pi}{2n}, \pi\right)$.*

О п р е д е л е н и е 3. При $-1 < q < 1$, $2 \le \ell \le n$ обозначим через $\tau_{q,\ell}$ косинус-полином степени не выше $n-1$, который интерполирует характеристическую функцию χ_{t_ℓ} интервала $(-t_\ell, t_\ell)$ в следующих n точках: t_j, $1 \le j \le n+1$, $j \ne \ell$.

Полином $\tau_{q,\ell}$ существует и единственный (см. [20, гл. 3, §3, с. 67,68, свойство 3]), поскольку система $\{1, \cos t, \cos 2t, \dots, \cos(n-1)t\}$ является чебышевской на $[0, \pi]$.

Теорема 5. *При $-1 < q < 1$, $2 \le \ell \le n$ полином $\tau_{q,\ell} \in \mathcal{T}_{n-1}$ является полиномом наилучшего интегрального приближения для функции χ_{t_ℓ}, причем выполняются равенства*

$$E_{n-1}(\chi_{t_\ell})_L = \|\chi_{t_\ell} - \tau_{q,\ell}\|_L = \left|\int_{-\pi}^{\pi} \chi_{t_\ell}(t)\,\mathrm{sgn}\,\{R_q(t)\}\,dt\right|; \tag{6.7}$$

$$E_{n-1}(\chi_{t_\ell})_L = \begin{cases} 2t_\ell - 4\sum_{j=1}^{\ell/2}(t_{2j-1} - t_{2j-2}) & \text{при четном } \ell, \\ \\ 2t_\ell - 4\sum_{j=1}^{[\ell/2]}(t_{2j} - t_{2j-1}) & \text{при нечетном } \ell; \end{cases} \tag{6.8}$$

здесь $t_0 = 0$, $[\ell/2]$ – целая часть числа $\ell/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о близко к доказательству теоремы 2.1.2 из [2], которое соответствует случаю $q = 1$. Повторим кратко рассуждения, адаптированные к случаю $|q| < 1$.

Полином $\tau_{q,\ell}$ и функция χ_{t_ℓ} являются четными функциями, поэтому $\tau_{q,\ell}$ интерполирует χ_{t_ℓ} в следующих точках: $\pm t_j$, $1 \le j \le n+1$, $j \ne \ell$. Эти точки разбивают период $\mathbb{T}$ (который удобно представлять в виде единичной окружности) на $2n$ участков, расположенных симметрично относительно нуля. Два симметричных участка $[-t_{\ell+1}, -t_{\ell-1}]$ и $[t_{\ell-1}, t_{\ell+1}]$ (внутри которых лежат соответственно точки $-t_\ell$ и t_ℓ) условимся называть *большими*, а все остальные участки — *малыми*.

[10] Утверждение, что полином R_q имеет $n+1$ различных нулей в интервале $(0, \pi)$ следует из леммы 1, а также из четности этого полинома и формул $R_q(0) = (1-q)^2 > 0$, $R_q(\pi) = (-1)^{n+1}(1+q)^2 \ne 0$.

В концевых точках произвольного малого участка полином $\tau_{q,\ell}$ принимает одинаковые значения (либо нулевые, либо равные единице). Поэтому внутри каждого из этих участков производная $\tau'_{q,\ell}$ имеет, по крайней мере, один ноль. Но поскольку малых участков $2(n-1)$, то других нулей у полинома $\tau'_{q,\ell}$ быть не должно, т.к. его степень равна $n-1$. Следовательно, внутри каждого малого участка имеется ровно по одному нулю. Отсюда заключаем, что производная не обращается в ноль на обоих больших участках. Поэтому полином $\tau_{q,\ell}$ убывает на $[t_{\ell-1}, t_{\ell+1}]$ от значения $\tau_{q,\ell}(t_{\ell-1}) = \chi_{t_\ell}(t_{\ell-1}) = 1$ до значения $\tau_{q,\ell}(t_{\ell+1}) = \chi_{t_\ell}(t_{\ell+1}) = 0$, а на отрезке $[-t_{\ell+1}, -t_{\ell-1}]$ полином $\tau_{q,\ell}$ возрастает от 0 до 1. В точках разрыва t_ℓ, $-t_\ell$ функции χ_{t_ℓ} полином $\tau_{q,\ell}$ принимает одинаковые положительные значения. Следовательно, выполняется равенство $\operatorname{sgn}\{\chi_{t_\ell}(t) - \tau_{q,\ell}(t)\} = (-1)^{\ell+1}\operatorname{sgn}\{R_q(t)\}$.

В силу утверждения (5.1) теоремы 4, функция $\operatorname{sgn}\{R_q(t)\}$ принадлежит $\mathcal{T}_{n-1}^{\perp}$. Отсюда и теоремы 2 следует, что $\tau_{q,\ell} \in \mathcal{T}_{n-1}$ является полиномом наилучшего интегрального приближения для χ_{t_ℓ}, причем справедливы равенства $E_{n-1}(\chi_{t_\ell})_L = 2\left|\int_0^\pi \chi_{t_\ell}(t)\operatorname{sgn}\{R_q(t)\}\,dt\right| = 2\left|\int_0^{t_\ell} \chi_{t_\ell}(t)\operatorname{sgn}\{R_q(t)\}\,dt\right|$, которые равносильны утверждениям (6.7), (6.8). □

Важным частным случаем теоремы 5 является случай $\ell = 2$. В этом случае $\tau_{q,2} \in \mathcal{T}_{n-1}$ является полиномом наилучшего интегрального приближения для χ_{t_2}, причем

$$E_{n-1}(\chi_{t_2})_L = \|\chi_{t_2} - \tau_{q,2}\|_L = 2t_2 - 4t_1 \quad \text{при} \quad -1 < q < 1, \quad 2 \le n. \tag{6.9}$$

Учитывая лемму 2, вместо параметра $q \in (-1,1)$ можно использовать параметр $h = t_2(q) \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right)$. В этом случае имеет место равенство

$$q = q(h) = \frac{\sin h + \cos nh}{\cos(n-1)h} \quad \text{при} \quad h = t_2(q) \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right). \tag{6.10}$$

Действительно, из формулы (6.5) получаем уравнение

$$R_q(h) \equiv \cos(n+1)h - 2q\cos nh + q^2\cos(n-1)h = 0. \tag{6.11}$$

Относительно q уравнение (6.11) имеет два решения. Лишь одно из этих решений (а именно, то, которое задано формулой (6.10)) удовлетворяет условию, что $q(h)$ монотонно убывая, пробегает интервал $(-1,1)$, когда h, монотонно возрастая, пробегает интервал $\left(\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right)$. Другое решение больше единицы по абсолютной величине.

Обозначим через $t_1 = t_{1,h}$ первый положительный ноль полинома $R_{q(h)}(t)$. Для выяснения более подробной информации об этом нуле воспользуемся представлением (6.6). В силу (7.14) и двух последних равенств в (7.12), функция $\widetilde{\varphi}(t) = nt - \lambda(t, q(h))$ возрастает по t на $[0,\pi]$, причем $\widetilde{\varphi}(0) = -\pi$, $\widetilde{\varphi}(\pi) = n\pi$. Отсюда с помощью представления (6.6) заключаем, что $t_1 = t_{1,h}$ совпадает с корнем уравнения $nt - \lambda(t, q(h)) = -\pi/2$. Перепишем это уравнения в эквивалентных формах $nt = \lambda(t, q(h)) - \frac{\pi}{2}$, $\quad \cos nt = \cos\left[\lambda(t, q(h)) - \frac{\pi}{2}\right]$, $\quad \cos nt = \sin\lambda(t, q(h))$.

Применяя формулу (7.13) параграфа 7, приходим к уравнению

$$\cos nt = \frac{\left\{1 - q^2(h)\right\}\cdot\sin t}{1 + q^2(h) - 2q(h)\cos t}, \tag{6.12}$$

единственным корнем которого в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2n}\right)$ является $t_{1,h}$.

Теорема 6. *Справедливы следующие утверждения:*
(1) *величина* $v_{1,n} = n \cdot t_{1,\pi/n}$ *убывает по* $n \ge 2$;
(2) *предел* $v_1 = \lim\limits_{n\to\infty} v_{1,n} = 0.97116830789\ldots$ *совпадет с единственным корнем на* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *уравнения*[11]

$$\cos v = \frac{2v\pi}{v^2 + \pi^2}; \tag{6.13}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \mathfrak{I}_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi - 4v_1 = 2.398512075618\ldots$

[11] Отметим, что на $[0,\pi/2]$ корень уравнения (6.13) совпадает с корнем уравнения $\sec v - \operatorname{tg} v = \dfrac{v}{\pi}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $h = \pi/n$ уравнение (6.12) приобретает вид

$$\cos nt = \frac{\left\{1 - q^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\} \cdot \sin t}{1 + q^2\left(\frac{\pi}{n}\right) - 2q\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos t}. \tag{6.14}$$

Как говорилось выше, $t_1 = t_{1,\pi/n}$ совпадает с единственным корнем этого уравнения, расположенным в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2n}\right)$. Замена $v = nt$, $t = \frac{v}{n}$ преобразует уравнение (6.14) к виду

$$\cos v = \frac{\left\{1 - q^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\} \cdot \sin \frac{v}{n}}{1 + q^2\left(\frac{\pi}{n}\right) - 2q\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos \frac{v}{n}}. \tag{6.15}$$

Понятно, что корень этого уравнения, расположенный в интервале $(0, \pi/2)$, совпадет с $v_{1,n}$, причем он является единственным в этом интервале.

Покажем, что $v_{1,n}$ убывает по $n \geq 2$. Действительно, $\cos v$ — левая часть уравнения (6.15) является убывающей функцией в интервале $(0, \pi/2)$. Поэтому достаточно доказать, что правая часть уравнения возрастает по $n \geq 2$ при любом фиксированном значении v из $(0, \pi/2)$. Для доказательства этого утверждения сделаем еще одну замену $\alpha = 1/n$. Учитывая (6.10), после преобразований, приходим к следующим формулам: $q(\alpha\pi) = \dfrac{1 - \sin \alpha\pi}{\cos \alpha\pi} = \sec \alpha\pi - \operatorname{tg} \alpha\pi$, $q^2(\alpha\pi) = \dfrac{1 - \sin \alpha\pi}{1 + \sin \alpha\pi}$, $\quad 1 - q^2(\alpha\pi) = \dfrac{2 \sin \alpha\pi}{1 + \sin \alpha\pi}$, $\quad 1 + q^2(\alpha\pi) = \dfrac{2}{1 + \sin \alpha\pi}$. Используя эти формулы, перепишем уравнение (6.15) в виде

$$\cos v = \frac{\sin \alpha\pi \sin \alpha v}{1 - \cos \alpha\pi \cos \alpha v}. \tag{6.16}$$

Для того, чтобы доказать, что правая часть уравнения (6.15) возрастает по $n \geq 2$ при любом фиксированном $v \in (0, \pi/2)$, достаточно показать, что функция

$$r(\alpha, v) = \frac{\sin \alpha\pi \sin \alpha v}{1 - \cos \alpha\pi \cos \alpha v} = \frac{\cos(\pi - v)\alpha - \cos(\pi + v)\alpha}{2 - \cos(\pi - v)\alpha - \cos(\pi + v)\alpha},$$

представляющая собой правую часть уравнения (6.16), является убывающей по $\alpha \in (0, 1/2)$ при фиксированном $v \in (0, \pi/2)$. Найдем частную производную функции $r(\alpha, v)$ по α и умножим ее на положительную функцию $\{2 - \cos(\pi - v)\alpha - \cos(\pi + v)\alpha\}^2/2$. В результате, получим

$$\frac{\{2 - \cos(\pi - v)\alpha - \cos(\pi + v)\alpha\}^2}{2} \cdot \frac{\partial r(\alpha, v)}{\partial \alpha} = 2\pi v\alpha \cdot (\cos v\alpha - \cos \pi\alpha) \cdot \left(\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} - \frac{\sin v\alpha}{v\alpha}\right). \tag{6.17}$$

Правая часть равенства (6.17) отрицательна при $\alpha \in (0, 1/2)$, $v \in (0, \pi/2)$, поскольку функция $\frac{\sin x}{x}$ убывает на $(0, \pi)$. Таким образом, величина $v_{1,n} = n \cdot t_{1,\pi/n}$ убывает по $n \geq 2$.

Для того, чтобы найти предел величины $v_{1,n}$ при $n \to \infty$, устремим параметр α к нулю в правой части уравнения (6.16), получим "предельное" уравнение $\cos v = \dfrac{2v\pi}{v^2 + \pi^2}$. Из соображений непрерывности, корень v этого уравнения, расположенный на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, совпадет с искомым пределом $v_1 = \lim\limits_{n\to\infty} v_{1,n} = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot t_{1,\pi/n}$. Решая численно "предельное" уравнение на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, находим $v_1 = 0.97116830789\ldots$ Таким образом, приходим к равенствам

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n \cdot \mathfrak{I}_n\left(\frac{\pi}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} n \cdot 2\left(\frac{\pi}{n} - 2t_{1,\pi/n}\right) = 2\lim_{n\to\infty}\left(\pi - 2 \cdot n \cdot t_{1,\pi/n}\right) = \\ &= 2(\pi - 2v_1) = 2.398512075618\ldots,\end{aligned} \tag{6.18}$$

которые завершают доказательство теоремы. □

Вернемся к изучению поведения величины $\mathfrak{I}_n(h) = E_{n-1}(\chi_h)_L$ по h при некоторых n. Рассмотрим сначала случай $n = 2$. В этом случае в силу свойств (6.2), (6.3) достаточно найти

$\mathfrak{I}_2(h)$ при $\frac{\pi}{4} \le h \le \frac{\pi}{2}$. Действуя также как и выше (см. формулы (6.10), (6.11)), найдем первый ноль $t_1 = t_{1,h} = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{2} - \arccos\left(\frac{\sin h}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{h}{2}\right)}\right)$ соответствующей функции Бернштейна. Отсюда и (6.1), (6.9), (6.10) получаем $\mathfrak{I}_2(h) = -\pi + 4\arccos\left(\frac{\sin h}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{h}{2}\right)}\right)$ при $\frac{\pi}{4} \le h \le \frac{\pi}{2}$. В частности, $2\cdot\mathfrak{I}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} = 2.094395102393\ldots$.

При $n \ge 3$ явных формул для $\mathfrak{I}_n(h)$, аналогичные случаю $n = 2$, найти не удалось. Однако, с помощью теоремы 5 можно с любой степенью точности найти эту функцию на густой сетке. Таким способом был построен график функции $\mathfrak{I}_8(h)$, который приведен на рис. 1. Напомним (см. (6.3), (6.2)), что $\mathfrak{I}_8(h) = 2h$ при $h \in \left(0, \frac{\pi}{16}\right)$ и $\mathfrak{I}_8(h) = 2(\pi - h)$ при $h \in \left(\frac{15\pi}{16}, \pi\right)$.

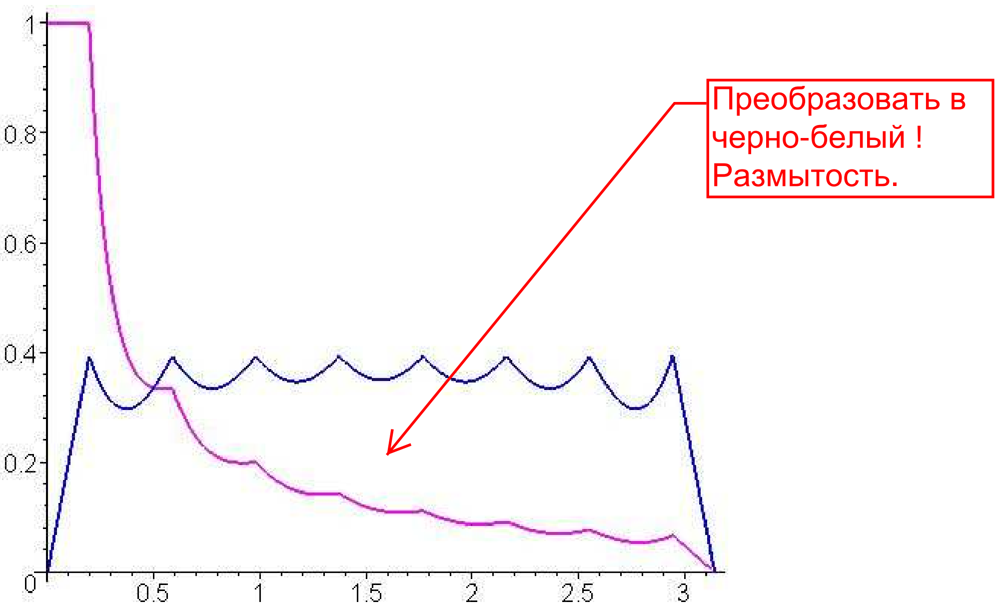

Рис. 1: Графики функций $\mathfrak{I}_8(h)$, $\frac{1}{2h}\mathfrak{I}_8(h)$ на отрезке $[0, \pi]$.

В некоторых задачах теории приближения удобно применять вместо χ_h – классической характеристической функции интервала $(-h, h)$, функцию $\mathcal{X}_h(t) = \frac{1}{2h}\chi_h(t)$, $\quad 0 < h \le \pi$, которую называют *L-нормированной* характеристической функцией интервала $(-h, h)$, она норимрована условием $\|\mathcal{X}_h\|_L = 1$. Ясно, что $E_{n-1}(\mathcal{X}_h)_L = \frac{1}{2h}E_{n-1}(\chi_h)_L = \frac{1}{2h}\mathfrak{I}_n(h)$. В частности (см. формулу (6.9)), выполняются равенства

$$E_{n-1}(\mathcal{X}_{t_2})_L = \frac{2t_2 - 4t_1}{2t_2} = 1 - \frac{2t_1}{t_2}. \tag{6.19}$$

С помощью теоремы 6 получаем, что последовательность $\mathcal{E}_{k-1} = E_{k-1}\left(\mathcal{X}_{\pi/k}\right)_L$, $k = 2, 3, \ldots$, монотонно возрастая, стремится к числу $1 - \frac{2v_1}{\pi}$, т.е.

$$\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2 < \cdots < \mathcal{E}_k < \mathcal{E}_{k+1} < \cdots < \lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_n = 1 - \frac{2v_1}{\pi} = 0.3817350529\ldots \tag{6.20}$$

На рис 1 приведен график функции $\frac{1}{2h}\mathfrak{I}_8(h) = E_7(\mathcal{X}_h)_L$. Из (6.3) следует, что на тривиальном участке $\left(0, \frac{\pi}{16}\right)$ функция $\frac{1}{2h}\mathfrak{I}_8(h)$ постоянна и равна на нем единице.

Авторы искренне признательны М.В.Дейкаловой за помощь в численных расчетах.

7. Свойства функции Бернштейна

В данном параграфе изучаются свойства функции Бернштейна

$$B(t,a,\xi)=\cos\left[nt-\delta(t,a)+\xi\right], \quad \delta(t,a)=\arccos u(t,a), \quad u(t,a)=\frac{1-a\cos t}{a-\cos t}, \tag{7.1}$$

где $n\in\mathbb{N}$, $a\in(-\infty,-1)\bigcup(1,+\infty)$, $\xi\in\mathbb{R}$, $t\in[0,\pi]$. Кроме того, указанная функция будет продолжена на $[-\pi,0]$.

Следующие соотношения легко проверить:

$$1-u^2(t,a)=1-\left(\frac{1-a\cos t}{a-\cos t}\right)^2=\frac{(a^2-1)\cdot\sin^2 t}{(a-\cos t)^2}; \tag{7.2}$$

$$\sin\delta(t,a)=\sin\arccos u(t,a)=\sqrt{1-u^2(t,a)}=\frac{\sqrt{a^2-1}\cdot\sin t}{|a-\cos t|}; \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial u(t,a)}{\partial t}=\frac{(a^2-1)\cdot\sin t}{(a-\cos t)^2}; \quad \frac{\partial\delta(t,a)}{\partial t}=\frac{-\sqrt{a^2-1}}{|a-\cos t|}; \quad \delta(0,a)=\pi, \quad \delta(\pi,a)=0. \tag{7.4}$$

Отсюда следует, что при $|a|>1$ функция $\varphi(t,a,\xi)=nt-\delta_a(t)+\xi$ возрастает по t на $[0,\pi]$, причем $\varphi(0,a,\xi)=-\pi+\xi$, $\varphi(\pi,a,\xi)=n\pi+\xi$. Поэтому справедлива

Лемма 3. *При* $\xi,a\in\mathbb{R}$, $|a|>1$ *функция* $B(t)=B(t,a,\xi)$, *определенная формулой* (4.7), *имеет* $(n+1)$*-точечный альтернанс на полуинтервале* $[0,\pi)$.

Функция $B(t,a,\xi)$ при $\xi=0$ возникла в исследованиях С.Н.Бернштейна в связи с задачей (4.2). Он доказал [3, с. 129, 130, пункт 3] лемму 3 при $\xi=0$, что позволило ему найти решение (4.4) задачи (4.2). В случае произвольного $\xi\in\mathbb{R}$ доказательство леммы 3 такое же.

Пусть $a,\xi\in\mathbb{R}$, $|a|>1$; рассмотрим функцию

$$\beta(t,a,\xi)=2(\cos t-a)\cdot B(t,a,\xi)=2(\cos t-a)\cos\left[nt-\delta(t,a)+\xi\right], \quad t\in[0,\pi].$$

Из замечания С.Н.Бернштейна [3, сноска 3 на с. 137] следует, что функция $\beta(t,a,\xi)$ при $\xi=0$ является тригонометрическим полиномом. Чтобы убедиться в справедливости аналогичного утверждения в случае произвольного $\xi\in\mathbb{R}$, воспользуемся формулами (7.2), (7.3) и стандартными тригонометрическими формулами.

Для числа $a\in(-\infty,-1)\bigcup(1,+\infty)$ найдется единственное число $q\in(-1,0)\bigcup(0,1)$, которое связано с ним следующим образом: $a=\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{q}\right)=\frac{1+q^2}{2q}$. При этом параметру $a\in(-\infty,-1)$ соответствует параметр $q\in(-1,0)$, а параметру $a\in(1,+\infty)$ соответствует параметр $q\in(0,1)$. Отсюда следует, что

$$a+\sqrt{a^2-1}=1/q, \quad a-\sqrt{a^2-1}=q \quad \text{при} \quad a>1, \quad q\in(0,1); \tag{7.5}$$

$$a-\sqrt{a^2-1}=1/q, \quad a+\sqrt{a^2-1}=q \quad \text{при} \quad a<-1, \quad q\in(-1,0). \tag{7.6}$$

Рассмотрим сначала случай $a>1$:

$$\begin{aligned}\beta(t,a,\xi) &= 2(\cos t-a)\left[\cos(nt+\xi)\cos\delta(t,a)+\sin(nt+\xi)\sin\delta(t,a)\right] = \\ &= 2(\cos t-a)\left[\frac{1-a\cos t}{a-\cos t}\cos(nt+\xi)+\sqrt{1-\left(\frac{1-a\cos t}{a-\cos t}\right)^2}\sin(nt+\xi)\right] = \\ &= \left\{a+\sqrt{a^2-1}\right\}\cos[(n+1)t+\xi]-2\cos(nt+\xi)+\left\{a-\sqrt{a^2-1}\right\}\cos[(n-1)t+\xi].\end{aligned} \tag{7.7}$$

С помощью формул (7.7), (7.5), получаем

$$q{\cdot}\beta(t,a,\xi) = \cos[(n+1)t+\xi] - 2q\cos(nt+\xi) + q^2\cos[(n-1)t+\xi]. \tag{7.8}$$

Рассмотрим теперь случай $a < -1$:

$$\begin{aligned} \beta(t,a,\xi) &= 2(a\cos t - 1)\cos(nt+\xi) + 2\sqrt{a^2-1}\sin t\sin(nt+\xi) = \\ &= \left\{a - \sqrt{a^2-1}\right\}\cos[(n+1)t+\xi] - 2\cos(nt+\xi) + \left\{a + \sqrt{a^2-1}\right\}\cos[(n-1)t+\xi]. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом формул (7.6), получаем равенство

$$q{\cdot}\beta(t,a,\xi) = \cos[(n+1)t+\xi] - 2q\cos(nt+\xi) + q^2\cos[(n-1)t+\xi]. \tag{7.9}$$

Сравнивая формулы (7.8), (7.9), приходим к заключению, что двум семействам полиномов $\{\beta(t,a,\xi),\ a>1\}$ и $\{\beta(t,a,\xi),\ a<-1\}$ соответствует одно семейство полиномов

$$\begin{aligned} R_{q,\xi}(t) &= q{\cdot}\beta(t,a,\xi) = 2q(\cos t - a){\cdot}B(t,a,\xi) = \\ &= \cos[(n+1)t+\xi] - 2q\cos(nt+\xi) + q^2\cos[(n-1)t+\xi], \quad -1<q<1, \end{aligned} \tag{7.10}$$

при этом параметры a и q связаны между собой формулами (7.5), (7.6) и одному значению параметра $q=0$ соответствуют одновременно два предельных значения параметра $a=\pm\infty$.

Нам будет проще изучать функцию Бернштейна в терминах параметра q. Для этого перепишем сначала функцию $\delta(t,a)$ в терминах параметра $q\in(-1,1)$

$$\delta(t,a) = \lambda(t,q) = \arccos\widetilde{u}(t,q), \quad \widetilde{u}(t,q) = \frac{2q-(1+q^2)\cos t}{1+q^2-2q\cos t}. \tag{7.11}$$

В дальнейшем нам понадобятся формулы, аналогичные формулам (7.2), (7.3), (7.4)

$$1-\widetilde{u}^2(t,q) = \frac{(1-q^2)^2\cdot\sin^2 t}{(1+q^2-2q\cos t)^2}, \quad \lambda(0,q)=\pi, \quad \lambda(\pi,q)=0, \tag{7.12}$$

$$\sin\lambda(t,q) = \sin\arccos\widetilde{u}(t,q) = \sqrt{1-\widetilde{u}^2(t,q)} = \frac{(1-q^2)\cdot\sin t}{1+q^2-2q\cos t}, \tag{7.13}$$

$$\frac{\partial\widetilde{u}(t,q)}{\partial t} = \frac{(1-q^2)^2\sin t}{(1+q^2-2q\cos t)^2} = \frac{1-\widetilde{u}^2(t,q)}{\sin t}, \quad \frac{\partial\widetilde{u}(t,q)}{\partial q} = \frac{2(1-q^2)\sin^2 t}{(1+q^2-2q\cos t)^2} = 2\left\{1-\widetilde{u}^2(t,q)\right\},$$

$$\frac{\partial\lambda(t,q)}{\partial t} = \frac{-1}{\sqrt{1-\widetilde{u}^2(t,q)}}\cdot\frac{\partial\widetilde{u}(t,q)}{\partial t} = \frac{-\sqrt{1-\widetilde{u}^2(t,q)}}{\sin t} = \frac{q^2-1}{1+q^2-2q\cos t}, \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial\lambda(t,q)}{\partial q} = \frac{-1}{\sqrt{1-\widetilde{u}^2(t,q)}}\cdot\frac{\partial\widetilde{u}(t,q)}{\partial q} = -2\sqrt{1-\widetilde{u}^2(t,q)} = -2\sin\lambda(t,q) = \frac{2(q^2-1)\sin t}{1+q^2-2q\cos t}. \tag{7.15}$$

Произведя замену $a=(1+q^2)/(2q)$ в $B(t,a,\xi)$, получим новую функцию, зависящую от q, которую обозначим через $\mathcal{B}(t,q,\xi)$. Таким образом, при $t\in[0,\pi]$, $\xi\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ имеем

$$B(t,a,\xi) = \mathcal{B}(t,q,\xi) = \cos\left[nt-\lambda(t,q)+\xi\right] = \frac{R_{q,\xi}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)}, \quad -1<q<1; \tag{7.16}$$

здесь учтено первое равенство в (7.10).

До этого момента мы рассматривали случай $t\in[0,\pi]$. Перейдем сейчас к изучению случая $t\in[-\pi,0]$. Для этого выразим полином $R_{q,\xi}(t)$ при $t\in[-\pi,0]$ в терминах функции Бернштейна с помощью замены $t=\theta-\pi$, $\theta\in[0,\pi]$:

$$\begin{aligned} R_{q,\xi}(t) &= R_{q,\xi}(\theta-\pi) = (-1)^{n+1}\left\{\cos[(n+1)\theta+\xi] + 2q\cos(n\theta+\xi) + q^2\cos[(n-1)\theta+\xi]\right\} = \\ &= (-1)^{n+1}R_{-q,\xi}(\theta) = (-1)^{n+1}\{2q\cos t-(1+q^2)\}\mathcal{B}_{-q,\xi}(t+\pi), \quad t\in[-\pi,0]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем представление

$$\frac{R_{q,\xi}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)}=\begin{cases}(-1)^{n+1}\mathcal{B}(t+\pi,-q,\xi) & \text{при} \quad -\pi\le t\le 0,\\ \mathcal{B}(t,q,\xi) & \text{при} \quad 0\le t\le \pi.\end{cases} \tag{7.17}$$

Это представление можно переписать в другой эквивалентной форме, а именно

$$\frac{R_{q,\xi}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)}=\cos\left[nt+\xi-\mu(t,q)\right], \quad t\in[-\pi,\pi], \tag{7.18}$$

где $\mu(t,q)=\pi+\lambda(t+\pi,-q)$ при $t\in[-\pi,0]$, $\mu(t,q)=\lambda(t,q)$ при $t\in[0,\pi]$. Несложно проверить, что при любом $q\in(-1,1)$ функция $\mu(t,q)$, как функция переменной t, является убывающей на $[-\pi,\pi]$, бесконечно дифференцируемой в интервале $(-\pi,\pi)$ и $\mu(-\pi,q)=2\pi$, $\mu(\pi,q)=0$.

Из представлений (7.17), (7.18) и леммы 3 следует, что при $n\in\mathbb{N}$, $q\in(-1,1)$, $\xi\in\mathbb{R}$ функция

$$F_{q,\xi}(t)=\frac{R_{q,\xi}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)}=\frac{\cos[(n+1)t+\xi]-2q\cos(nt+\xi)+q^2\cos[(n-1)t+\xi]}{2q\cos t-(1+q^2)} \tag{7.19}$$

на каждом из полуинтервалов $[-\pi,0)$ и $[0,\pi)$ имеет $(n+1)$-точечный альтернанс; на всем периоде $\mathbb{T}=[-\pi,\pi)$ функция $F_{q,\xi}$ имеет $(2n+2)$-точечный альтернанс; полином $R_{q,\xi}$ на каждом из полуинтервалов $[-\pi,0)$, $[0,\pi)$ имеет ровно по $n+1$ различных нулей.

Отсюда с помощью теоремы Чебышева об альтернансе (см. [14, гл. III, §4, с. 95, теорема 2]) и теоремы 4 получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *При* $n\in\mathbb{N}$, $q\in(-1,1)$, $\xi\in\mathbb{R}$ *функция* $F_{q,\xi}$ *не приближается пространством* $\mathcal{T}_n$ *в равномерной норме. Кроме того, функция* $F_{q,\xi}$ *не приближается пространством* $\mathcal{T}_{n-1}$ *в интегральной норме.*

Сопоставим паре чисел $q\in(-1,1)$, $\xi\in\mathbb{R}$ функцию

$$f_{q,\xi}(t)=\frac{2q}{2q\cos t-(1+q^2)}\cdot\left\{\cos\xi+\frac{2q\sin\xi\sin t}{1-q^2}\right\}. \tag{7.20}$$

Теорема 8. *При любых* $q\in(-1,1)$, $\xi\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ *имеем*

$$E_n(f_{q,\xi})_{C_{2\pi}}=\inf_{g\in\mathcal{T}_n}\|f_{q,\xi}-g\|_{C_{2\pi}}=\frac{4q^{n+2}}{(1-q^2)^2}. \tag{7.21}$$

Утверждение (7.21) при $\xi=0$ равносильно результату С.Н.Бернштейна (4.4).

Доказательство теоремы 8. При $q=0$ утверждение (7.21) очевидно. Пусть $q\in(-1,0)\bigcup(0,1)$. В силу первого утверждения теоремы 7, для доказательства (7.21) достаточно показать, что функция

$$\frac{4q^{n+2}}{(1-q^2)^2}\cdot\frac{R_{q,\xi}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)}-f_{q,\xi}(t) \tag{7.22}$$

является тригонометрическим полиномом степени не выше n.

Из второго равенства в (4.10) следует, что $R_{q,\xi}(t)=R_{q,0}(t)\cos\xi+R_{q,\pi/2}(t)\sin\xi$. Поэтому для доказательства (7.22) достаточно установить справедливость следующих утверждений:

$$\frac{2q^{n+1}}{(1-q^2)^2}\cdot\frac{R_{q,0}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)}-\frac{1}{2q\cos t-(1+q^2)} \quad\in\quad \mathcal{C}_n, \tag{7.23}$$

$$\frac{q^{n}}{1-q^2}\cdot\frac{R_{q,\pi/2}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)}+\frac{\sin t}{2q\cos t-(1+q^2)} \quad\in\quad \mathcal{S}_n, \tag{7.24}$$

где $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{S}_n$ — пространства косинус- и синус-полиномов степени не выше n соответственно.

"Сократив" (7.24) на $\sin t$ и произведя замену $x=\cos t$, получим утверждения

$$\frac{2q^{n+1}\left\{T_{n+1}(x)-2qT_n(x)+q^2T_{n-1}(x)\right\}-(1-q^2)^2}{2qx-(1+q^2)} \in \mathcal{P}_n, \tag{7.25}$$

$$\frac{q^{n}\left\{U_{n}(x)-2qU_{n-1}(x)+q^2U_{n-2}(x)\right\}-(1-q^2)}{2qx-(1+q^2)} \in \mathcal{P}_{n-1}, \tag{7.26}$$

равносильные (7.23), (7.24). Здесь T_k, U_k — многочлены Чебышева 1-го и 2-го рода соответственно. Включения (7.25), (7.26) выполняются тогда и только тогда, когда многочлены, являющиеся числителями дробей в правых частях этих включений, обращаются в ноль при $x=\frac{1+q^2}{2q}=\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{q}\right)$; что, в свою очередь, имеет место в силу известных формул (см. [16, гл. I, §1, с. 14, (20), (21)]) $2T_k\left(\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{q}\right)\right)=q^k+\frac{1}{q^k}$, $\left(q-\frac{1}{q}\right)U_k\left(\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{q}\right)\right)=q^{k+1}-\frac{1}{q^{k+1}}$. □

Применение теоремы 8 в случае $\xi=\pi/2$ и замена $x=\cos t$ влекут следующее утверждение.

Теорема 9. *При любых* $q\in(-1,1)$, $n\in\mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\inf_{p\in\mathcal{P}_{n-1}}\left\|\left\{\frac{2q}{2qx-(1+q^2)}-p(x)\right\}\sqrt{1-x^2}\right\|_{C[-1,1]}=\frac{2q^{n+1}}{1-q^2}.$$

Представление (7.17) позволяет сделать вывод, что $(n+1)$-точечный альтернанс функции $\dfrac{R_{q,\xi}(t)}{2q\cos t-(1+q^2)}$ на $[0,\pi)$ совпадает с набором нулей частной производной

$$\frac{\partial\mathcal{B}(t,q,\xi)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\cos\left[nt-\lambda(t,q)+\xi\right]=-\left(n+\frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos t}\right)\sin\left[nt-\lambda(t,q)+\xi\right]=$$

$$=\left(n+\frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos t}\right)\cos\left[nt-\lambda(t,q)+\xi+\frac{\pi}{2}\right]=\left(n+\frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos t}\right)\mathcal{B}\left(t,q,\xi+\frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда и (7.16), (7.19) получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{B}(t,q,\xi)}{\partial t} &= \left(n+\frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos t}\right)\mathcal{B}\left(t,q,\xi+\frac{\pi}{2}\right)= \\ &= -\left(n+\frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos t}\right)\frac{\sin[(n+1)t+\xi]-2q\sin(nt+\xi)+q^2\sin[(n-1)t+\xi]}{2q\cos t-(1+q^2)}.\end{aligned}\tag{7.27}$$

Таким образом, имеет место следующая теорема, в которой через $\{t_j(q,\xi)\}_{j=1}^{n+1}$ обозначен упорядоченный по возрастанию набор нулей функции $\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}(t,q,\xi)$ на $[0,\pi)$.

Теорема 10. *При* $n\in\mathbb{N}$, $q\in(-1,1)$, $\xi\in\mathbb{R}$ *справедливы следующие утверждения:*
(*a*) $(n+1)$*-точечный альтернанс функции* $\mathcal{B}(t,q,\xi)$ *на полуинтервале* $[0,\pi)$ *совпадает с набором нулей функции* $\mathcal{B}(t,q,\xi+\pi/2)$ *на* $[0,\pi)$ *и наоборот, т.е. выполняются равенства*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\left(t_j\left(q,\xi+\frac{\pi}{2}\right),q,\xi\right) &= \varepsilon_1\cdot(-1)^j, \quad j=1,2,\ldots,n+1, \quad \varepsilon_1=\pm1;\\ \mathcal{B}\left(t_j(q,\xi),q,\xi+\frac{\pi}{2}\right) &= \varepsilon_2\cdot(-1)^j, \quad j=1,2,\ldots,n+1, \quad \varepsilon_2=\pm1;\end{aligned}$$

(*b*) *нули* $t_j(q,\xi)$ *функции* $\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}(t,q,\xi)$, *расположенные в интервале* $(0,\pi)$, *являются убывающими функциями параметра* $q\in(-1,1)$.

Утверждение (*b*) теоремы 10 является следствием равенств (7.15), из которых видно, что функция $\lambda(t,q)$ при каждом фиксированном $t\in(0,\pi)$ убывает по q. Теперь остается заметить, что каждый нуль функции $\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}(t,q,\xi)$, расположенный в интервале $(0,\pi)$, совпадает с корнем уравнения: $nt+\xi-(2k-1)\pi/2=\lambda(t,q)$, в котором k есть некоторое целое число.

Г.Меинардус [24, гл. 1, §4, с. 34] (см. также [26, с. 73, лемма 3]), используя другой способ, доказал утверждение, содержащее в себе утверждение (*b*) теоремы 10 в случае $\xi=-\pi/2$.

Авторы искренне признательны профессору В.В.Арестову за ряд ценных замечаний и плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Литература плохо сделана, нужно дорабатывать.

1. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М. : Наука, 1965. 408 с.
2. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** О приближении ступенчатых функций тригонометрическими полиномами в интегральной метрике // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, вып. 1. С. 27–56.
3. **Бернштейн С.Н.** Собрание сочинений : в 4-х т. Т.1: Конструктивная теория функций (1905-1930) — М. : АН СССР, 1952. 581 с.
4. **Галеев Э.М.** Задача Золотарева в метрике $L_1([-1,1])$ // Метем. заметки. 1975. Т. 17, №. 1. С. 13–20.
5. **Гейт В.Э.** О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в метрике $L[-1,1]$ (третье сообщение) // Сибирский журнал вычислительной математики. 2003. Т. 6, № 1. С. 37–57.
6. **Геронимус Я.Л.** Об одной экстремальной задаче Чебышева // Известия АН СССР. Серия матем. 1938. №. 4, с. 445–456.
7. **Геронимус Я.Л.** Об одной задаче F.Riecz'a и обощенной задаче Чебышева–Коркина–Золотарева // Известия АН СССР. Серия матем. 1939. №. 3, с. 279–288.
8. **Граве Д.А.** Трактат по алгебраическому анализу. Т.1: Начала науки /АН УССР. Ин-т математики. — Киев: Изд-во АН УССР, 1938. 208 с.
9. **Дейкалова М.В.** Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Матем. заметки. Принято в печать.
10. **Золотарев Е.И.** Полное собрание сочинений Егора Ивановича Золотарева. Выпуск второй. — Л.: Изд-во АН СССР. 1932. 364 с.
11. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976. 320 с.
12. **Коркин А.Н.** Сочинения. Т. 1. С.-П. : Физ.-мат. факультет Императорского С.-Петербургского ун-та, 1911.
13. **Марков А.А.** Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций наименее уклоняющихся от нуля. М.–Л. : ОГИЗ Гос. изд-во техн.-теор. лит. 411 с.
14. **Натансон И.П.** Конструктивная теория функций.- М.;Л.: Гос.изд-во техн.-теорет.лит., 1949. 688 с.
15. **Никольский С.М.** Приближение функций тригонометричесими полиномаи в среднем // Известия АН СССР. Серия матем. 1946. Т. 10, с. 207–256.
16. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева: Пер.с польск. М.: Наука, 1983. 384 с.
17. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. — М. : Физматгиз, 1962. 500 с.
18. **Чебышев П.Л.** Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1955. 926 с.
19. **Чебышев П.Л.** Полное собрание сочинений П.Л.Чебышева: В 5-ти т. – Т. 3: Математический анализ. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 412 с.
20. **DeVore R.A., Lorentz G.G.** Constructive approximation. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1993.- 449 c.
21. **Eremenko A, Yuditskii P.** Uniform approximation of $\operatorname{sgn} x$ by polynomials and entire functions // J. Anal. Math. 2007. Vol. 101. Pp. 313–324.
22. **Geronimus J.** Sur quelques propriétés extrémales polynômes, dont les coefficients premiers sont donnés // Сообщ. Харьковского матем. общ-ва. Серия 4. 1935. Т. 12. С. 49–59.
23. **Geronimus J.** On some extremal properties of polynomials // Annals of Math. 1936. Vol. 37. Pp. 483–517.
24. **Meinardus G.** Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung. Berlin etc.: Springer, 1964.- 180 c. — (Springer Tracts in natur. philosoph.; Vol. 4).
25. **Peherstorfer F.** Trigonometric polynomials approximation in L^1-norm // Mathematische Zeitschrift. 1979. Vol. 169. Pp. 261–269.
26. **Peherstorfer F.** On the representation of extremal functions in the L^1-norm // Journal of Approximation Theory. 1979. Vol. 27. Pp. 61–75.
27. **Vaaler J.D.** Some extremal functions in Fourier analysis // Bulletin (New Series) of the Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 12. N. 2. Pp. 183–216.