Обозначим через $\overline{A}_\theta$ и $\overline{A}^\theta$ пространства, построенные по первому и второму комплексным методам Кальдерона по банаховой паре $\overline{A}$ соответственно (см. [2]). Из предложения 4.8 из [4] и результатов статьи непосредственно следует

Теорема 9. *Если пара $\overline{A} \in M$, то*

$$\overline{A}_\theta = \overline{A}^0_{\theta, \infty}, \quad \overline{A}^\theta = \overline{A}_{\theta, \infty}, \quad 0 < \theta < 1;$$

здесь через $\overline{A}^0_{\theta, \infty}$ обозначено замыкание $\Delta\overline{A}$ в пространстве $\overline{A}_{\theta, \infty}$.

Если пара $\overline{A} \in m$, то $\overline{A}_\theta = \overline{A}^\theta = \overline{A}_{\theta, 1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брудный Ю. А., Кругляк Н. Я. Функторы вещественной интерполяции. — ДАН СССР, 1981, т. 256, № 1, с. 14—17.
2. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. М., 1980. 264 с.
3. Дмитриев В. И., Крейн С. Г., Овчинников В. И. Основы теории интерполяции линейных операторов.— В сб.: Геометрия линейн. пространств и теория операторов. Ярославль, 1977, с. 31—74.
4. Nilsson P. Interpolation of Calderon and Ovčinnikov Pairs.— Ann. mat. pura ed appl., 1983, № 134, p. 201—232.
5. Дмитриев В. И., Овчинников В. И. Об интерполяции в пространствах вещественного метода.— ДАН СССР, 1979, т. 246, № 4, с. 794—797.
6. Дмитриев В. И. О методах построения и описания интерполяционных пространств.— Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук, Воронеж, 1975. 15 с.
7. Cwikel M., Peetre J. Abstract K and J spaces.— J. Math. pures et appl., 1981, v. 60, № 1, p. 1—50.
8. Cwikel M. Monotonicity properties of interpolation spaces.— Ark. Mat., 1976, v. 14, № 2, p. 213—236.

г. Уфа

Поступила 04.12.1985

М. И. Ганзбург

УДК 517.518

О ТОЧНЫХ КОНСТАНТАХ НАИЛУЧШЕГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НА $(m-1)$-МЕРНОЙ СФЕРЕ

1. В работе изучаются свойства точных верхних граней наилучших приближений алгебраическими многочленами в метриках L_1 и L_∞ на классах сверток, определенных на $(m-1)$-мерной сфере.

Точные константы наилучшего приближения тригонометрическими многочленами в $L_\infty(-\pi, \pi)$ на соответствующих классах дифференцируемых на окружности и гармонических в круге функций были найдены Ж. Фаваром [1], Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном [2], М. Г. Крейном [3]. С. М. Никольский [4] с помощью теорем двойственности доказал совпадение этих констант с соответствующими константами наилучшего приближения в $L_1(-\pi, \pi)$. Указанные результаты и их дальнейшие обобщения изложены в монографиях [5]—[7].

Порядковые оценки типа Джексона для наилучшего полиномиального приближения функций, заданных на сфере в R^m, получены в ряде публикаций, среди которых отметим работы Г. Г. Кушниренко [8], С. Павелке [9], П. И. Лизоркина и С. М. Никольского [10], [11]. Точный порядок наилучшего полиномиального приближения в метрике $L_p(S^{m-1})$ на классе $W^s_{q,m}$ сверток со сферическим ядром Бернулли $(s > (m-1)(1/q - 1/p))$ найден А. И. Камзоловым [12].

В данной статье исследуются некоторые аспекты проблемы нахождения констант наилучшего приближения алгебраическими многочленами на $(m-1)$-мерной сфере S^{m-1}. Найдена точная верхняя грань наилучших полиномиальных приближений на некоторых классах сверток в $L_1(S^{m-1})$ (теоремы 1, 1′, следствие) и доказано, что m-мерный аналог теоремы Фавара — Ахиезера —

Крейна не имеет места при $m > 2$ (теорема 2а)). При $m=2$ указано необходимое и достаточное условие совпадения точных верхних граней наилучших полиномиальных приближений на классах сверток в $L_1(S^1)$, $L_\infty(S^1)$ (теорема 2б)).

2. Пусть R^m есть m-мерное евклидово пространство; $x=(x_1, \ldots, x_m)$, $y=(y_1, \ldots, y_m)$ — точки R^m; t — точка R^1; $(x, y)=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i$; $|x|=(x, x)^{1/2}$; $S^{m-1}=\{x \in R^m : |x|=1\}$, $m \geqslant 2$; $B^m=\{x \in R^m : |x|<1\}$; $L_q(S^{m-1})$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — банахово пространство измеримых на S^{m-1} функций f с конечной нормой $\|f\|_{L_q(S^{m-1})}=\left\{\int_{S^{m-1}} |f(y)|^q\, dy\right\}^{1/q}$; $L_{q,m}$ — банахово пространство измеримых на $[-1, 1]$ функций φ с конечной нормой $\|\varphi\|_{L_{q,m}}=\left\{\int_{-1}^{1} |\varphi(t)|^q (1-t^2)^{(m-3)/2}\, dt\right\}^{1/q}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$; $\Gamma^r_{q,m}$ — класс функций $u_r(x)$, $0<r<1$, где $u_\rho(x)=u(\rho x)$, $0 \leqslant \rho < 1$, $x \in S^{m-1}$, — гармоническая в B^m функция, удовлетворяющая неравенству $\|u_\rho\|_{L_q(S^{m-1})} \leqslant 1$ $\forall \rho \in [0, 1)$; $W^s_{q,m}$ — класс функций f, для которых $\delta^s f \in L_q(S^{m-1})$, $\|\delta^s f\|_{L_q(S^{m-1})} \leqslant 1$, здесь δ — оператор Лапласа — Бельтрами для S^{m-1} ([13], с. 241);

$$\overset{0}{W}{}^s_{q,m}=\left\{f \in W^s_{q,m} : \int_{S^{m-1}} f\, dy=0\right\};$$

$\mathscr{P}_{n,m}$ — множество всех алгебраических многочленов от m переменных степени $\leqslant n$; $\Pi_{k,m}$ — множество всех сферических гармоник от m переменных степени k, $0 \leqslant k \leqslant n$ (см. [14], с. 232); $\widetilde{\mathscr{P}}_{n,m}$ — линейная оболочка $\bigcup_{k=0}^{n} \Pi_{k,m}$; C_n^λ — многочлен Гегенбауэра степени n порядка λ ([14], с. 228); $T_n=(n/2)C_n^0$, $U_n=C_n^1$ — многочлены Чебышева первого и второго рода.

Известно, что $\forall P \in \mathscr{P}_{n,m} \exists P_k \in \Pi_{k,m}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, такие, что $\forall x \in S^{m-1}$ имеем $P(x)=\sum_{k=0}^{n} P_k(x)$. Отсюда следует соотношение $(f \in L_q(S^{m-1}))$:

$$E_n(f)_q \overset{\text{def}}{=} \inf_{P \in \mathscr{P}_{n,m}} \|f-P\|_{L_q(S^{m-1})}=\inf_{P \in \widetilde{\mathscr{P}}_{n,m}} \|f-P\|_{L_q(S^{m-1})}.$$

Далее, для $\varphi \in L_{1,m}$ определим класс сверток

$$W_q(\varphi)=\Big\{f \in L_q(S^{m-1}) : f(x)=(\varphi * h)(x) \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \int_{S^{m-1}} \varphi[(x, y)]\, h(y)\, dy,\ \|h\|_{L_q(S^{m-1})} \leqslant 1\Big\}.$$

Частными случаями классов $W_q(\varphi)$ являются классы $\Gamma^r_{q,m}$, $\overset{0}{W}{}^s_{q,m}$. Именно,

$$\overset{0}{W}{}^s_{q,m}=W_q(\Psi_{s\,m}),\ \Gamma^r_{q,m}=W_q(\varphi_{r\,m}), \tag{1}$$

где

$$\varphi_{r\,m}(t)=\frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{m/2}}(1-r^2)(1+r^2-2rt)^{m/2},\ 0<r<1,$$

— ядро Пуассона и

$$\Psi_{s\,m}(t)=\frac{\Gamma(m/2-1)}{4\pi^{m/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+m-2}{[n(n+m-2)]^s} C_n^{m/2-1}(t),\ s \geqslant 1,$$

— сферическая функция Бернулли. Отметим, что $\Psi_{s2}(\cos\theta)$ совпадает с функцией Бернулли $D_{2s}(\theta)$.

Наконец, положим ($W \subset L_q(S^{m-1})$):

$$E_n[W;\ L_q(S^{m-1})] \overset{\text{def}}{=} \sup_{f\in W} E_n(f)_q,\ E_{n,m,q}(\varphi) \overset{\text{def}}{=} E_n[W_q(\varphi);\ L_q(S^{m-1})],$$

$$E_n^{(m)}(\varphi)_q \overset{\text{def}}{=} \inf_{P\in\mathscr{P}_{n,1}} \|\varphi - P\|_{L_{q,m}},\ \varphi \in L_{q,m}.$$

Далее всюду γ_m обозначает площадь поверхности S^{m-2},

$$\gamma_m = 2\pi^{(m-1)/2}[\Gamma((m-1)/2)]^{-1}.$$

3. Ниже приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi \in L_{q,m}$ *и* $f(y) = \varphi[(x_0, y)]$, $x_0 \in S^{m-1}$. *Тогда имеет место равенство*

$$E_n(f)_q = (\gamma_m)^{1/q} E_n^{(m)}(\varphi)_q. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть σ — группа ортогональных преобразований R^m, оставляющих неподвижной точку x_0. Тогда f инвариантна относительно группы σ, и, согласно работе автора и С. А. Пичугова [15], существует такой многочлен $P \in \mathscr{P}_{n,m}$, инвариантный относительно σ, что $E_n(f)_q = \|f - P\|_{L_q(S^{m-1})}$. Так как $P(y) = P_n[(x_0, y)]$ для некоторого $P_n \in \mathscr{P}_{n,1}$, то применение формулы Функа — Гекке ([14], с. 240) завершает доказательство.

Следующий результат является сферическим аналогом теоремы двойственности С. М. Никольского для приближения сверток [4] (см. также [6], с. 78).

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$E_{n,m,1}(\varphi) = \gamma_m E_n^{(m)}(\varphi)_1. \tag{3}$$

Доказательство. Обозначив

$$M_n = \{\Psi \in L_\infty(S^{m-1}):$$

$$\Psi \perp \widetilde{\mathscr{P}}_{n,m},\ \|\Psi\|_{L_\infty(S^{m-1})} \leqslant 1\},\ \varphi_0(y) = \varphi[(x_0, y)],$$

имеем

$$E_{n,m,1}(\varphi) = \sup_{\|h\|_{L_1(S^{m-1})}\leqslant 1} \sup_{\Psi\in M_n} \int_{S^{m-1}} f\Psi\, dy =$$

$$= \sup_{h\in M_n} \|f\|_{L_\infty(S^{m-1})} = \sup_{x_0\in S^{m-1}} E_n(\varphi_0)_1. \tag{4}$$

Из соотношений (2), (4) следует (3). Лемма доказана.

Ниже приведены свойства многочлена $Q_{n+1,m}(t) = Q_{n+1}(t) = t^{n+1} + \ldots$, наименее уклоняющегося от нуля (м. н. у. н.) в метрике $L_{1,m}$.

Лемма 3. *Имеют место следующие утверждения*:

а) *нули* $\{t_{k,n}\}_{k=1}^{n+1} = \{t_k\}_{k=1}^{n+1}$ *многочлена* Q_{n+1} *удовлетворяют неравенствам* $-1 < t_1 < \ldots < t_{n+1} < 1$;

б) *существует единственный м. н. у. н.*;

в) *при четном* n *выполнены соотношения*

$$(1 - t_k^2)^{(m-1)/2} Q'_{n+1}(t_k) = (-1)^{k+n/2+1} Q'_{n+1}(0),\ k = 1, \ldots, n+1. \tag{5}$$

Доказательство. Утверждения а), б) доказаны, напр., в работе С. Н. Бернштейна [16]. Для доказательства (5) рассмотрим многочлен $R_n(t) = t^n + \ldots$, удовлетворяющий соотношению

$$\int_{-1}^{1} |R_n(t)||t|^{m-2} dt = \inf_{P\in\mathscr{P}_{n-1,1}} \int_{-1}^{1} |t^n + P(t)||t|^{m-2} dt.$$

Докажем, что при четном n имеет место следующее равенство:

$$Q_{n+1}(t) = (-1)^{n/2} t R_n(\sqrt{1-t^2}). \tag{6}$$

Имеем

$$\int_{-1}^{1} |Q_{n+1}(t)| (1-t^2)^{(m-3)/2} dt = \int_{-1}^{1} \frac{|Q_{n+1}(\sqrt{1-t^2})|}{\sqrt{1-t^2}} |t|^{m-2} dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-1}^{1} |t| |R_n(\sqrt{1-t^2})| (1-t^2)^{(m-3)/2} dt. \tag{7}$$

Из (7) и утверждения б) следует равенство (6). В случае $n=0$ равенство (5) тривиально. Пусть $n \geqslant 2$ четно и $0 < z_{n/2+1} < \ldots < z_n < 1$ — положительные нули R_n. В силу ортогональности с весом $|t|^{m-2}$ функции $\operatorname{sign} R_n$ элементам из $\mathscr{P}_{n-1,1}$ для любого четного $P_{n-2} \in \mathscr{P}_{n-2,1}$ имеем

$$2 \sum_{k=n/2+1}^{n} (-1)^{k+1} \int_{0}^{z_k} P_{n-2}(t) t^{m-2} dt + \int_{0}^{1} P_{n-2}(t) t^{m-2} dt = 0. \tag{8}$$

Полагая

$$P_{n-2}(t) = t^{2-m} \frac{d}{dt} \left[\frac{R_n(t)}{t^2 - z_k^2} t^{m-1} \right],$$

$k = n/2+1, \ldots, n$, и подставляя в (8), получаем

$$(-1)^{k+1} R_n'(z_k) z_k^{m-2} + [R_n(1)]/[t^2 - z_k^2] = 0. \tag{9}$$

Из соотношений (6), (9) следует (5). Лемма доказана.

Замечание 1. Соотношения типа (5) имеют место и для некоторых других весов, напр., $(1-t^2)^{\lambda}$, e^{-t} и др.

4. Обозначим через H класс дифференцируемых на $(-1, 1)$ функций $\varphi \in L_{1,m}$ таких, что $\forall P \in \mathscr{P}_{n,1}$ функция $\varphi - P$ имеет на $(-1, 1)$ не более $n+1$ нулей.

Известно [16], что достаточным условием принадлежности $\varphi \in H$ является следующее условие: производная $\varphi^{(n+1)}(t)$ непрерывна на $(-1, 1)$ и $\varphi^{(n+1)}(t) \neq 0$ $\forall t \in (-1, 1)$. В частности, функции $\varphi_{r\,m}$, $\Psi_{1\,3}$ принадлежат классу H. В самом деле, $\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \varphi_{r\,m}(t) = (2r\pi)^{n+1} \varphi_{r\,m+2n+2}(t) > 0$ $\forall t \in (-1, 1)$. Известно ([17], с. 537), что $\Psi_{1\,3}(t) = -(4\pi)^{-1} [\ln(1-t) + 3\ln 2 - 1]$, откуда

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \Psi_{1\,3}(t) = (4\pi)^{-1} n! (1-t)^{-(n+1)} > 0 \quad \forall t \in (-1, 1).$$

Следовательно, $\varphi_{r\,m}$, $\Psi_{1\,3} \in H$.

Теорема 1. *Для $\varphi \in H$ имеют место следующие утверждения:*

а) *выполнено равенство* ($n = 0, 1, \ldots$)

$$E_{n,m,1}(\varphi) = \gamma_m \left| \int_{-1}^{1} \varphi(t) \operatorname{sign} Q_{n+1}(t) (1-t^2)^{(m-3)/2} dt \right|; \tag{10}$$

б) *в случае четного n многочлен P_n наилучшего приближения для φ в $L_{1,m}$ находится по формуле*

$$P_n(t) = \frac{Q_{n+1}(t)}{Q_{n+1}(0)} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+n/2+1} \frac{(1-t_k^2)^{(m-1)/2} \varphi(t_k)}{t - t_k}.$$

Доказательство. Утверждение а) следует из леммы 2 и теоремы А. А. Маркова ([16], [5], с. 98). Утверждение б) вытекает из леммы 3 и того факта, что P_n является интерполяционным многочленом Лагранжа для φ в узлах $\{t_k\}_{k=1}^{n+1}$ (см. [16]).

Замечание 2. Аналитическое выражение для Q_{n+1} известно при $m=2-Q_{n+1,2}=2^{-n}T_{n+1}$ (С. Н. Бернштейн [16]) и $m=3-Q_{n+1,3}=2^{-(n+1)}U_{n+1}$ (А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев [5], с. 102).

Замечание 3. С помощью равенства (6) можно получить для положительных нулей Q_{2n+1} следующее асимптотическое выражение:

$$t_{k+n+1,\,2n}=\{1-[\beta_k^2(1+o(1))]/(2n)^2\}^{1/2},\ n\to\infty,\ k=1,\ldots,n;$$

здесь $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — положительные нули некоторой целой функции экспоненциального типа 1.

Численные значения нулей Q_{n+1} могут быть приближенно вычислены для малых n с помощью ЭВМ. Например, при $m=4$, $n=10$ имеем $t_7=0{,}2405\ldots$, $t_8=0{,}4670\ldots$, $t_9=0{,}6664\ldots$, $t_{10}=0{,}8270\ldots$, $t_{11}=0{,}9397\ldots$

В случае $m=3$ соотношение (9) можно уточнить, а именно, справедлив следующий результат.

Теорема 1′. *Для* $\varphi\in H$ *имеет место равенство* $(m=3)$:

$$E_{n,3,1}(\varphi)=2\pi\left|\int_0^{\pi}\sin\theta\varphi(\cos\theta)\operatorname{sign}\sin(n+2)\theta d\theta\right|.$$

В частности, для ядер φ_{r3}, Ψ_{13} получаем

Следствие. Имеют место равенства

$$E_n[\Gamma_{1,3}^r,\ L_1(S^2)]=\frac{2\pi^{1/2}}{(1-r^2)^{1/2}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2k+1}\times\right.$$
$$\times\left(P_{-3/2}^{s_{k,n}-1}\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)\Big/\Gamma(s_{k,n}-3/2)-\right.$$
$$\left.\left.-P_{-3/2}^{s_{k,n}+1}\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)\Big/\Gamma(s_{k,n}+1/2)\right)\right|;\tag{11}$$

$$E_n[W_{1,3}^1;\ L_1(S^2)]=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2k+1)(s_{k,n}^2-1)},\tag{12}$$

где $s_{k,n}=(2k+1)(n+2)$, а P_ν^μ — функция Лежандра первого рода.

Справедливость соотношений (11), (12) следует из равенств (1) и теоремы 1′ после несложных преобразований.

Замечание 4. Точный порядок величин $E_n[W_{q,m}^s;\ L_p(S^{m-1})]$ при $s>(m-1)(1/q-1/p)$ и $E_n(\Psi_{sm})_p$ при $s>(m-1)(1-1/q)$ найден А. И. Камзоловым [12], [18].

5. В случае $m=2$ для специальных классов ядер известно соотношение [1]—[7]:

$$E_{n,m,\infty}(\varphi)=\gamma_m E_n^{(m)}(\varphi)_1.\tag{13}$$

При $m>2$ равенство (13) уже не имеет места, а именно, справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Пусть ядро* $\varphi\in L_{1,m}$, $\varphi\notin\mathscr{P}_{n,1}$, *удовлетворяет М-условию*: $\forall P\in\mathscr{P}_{n,1}$ *имеем* $\operatorname{mes}\{t\in[-1,\ 1]:\ \varphi(t)-P(t)=0\}=0$. *Тогда имеют место следующие утверждения*:

а) *при* $m>2$ *выполняется неравенство* $E_{n,m,\infty}(\varphi)<\gamma_m E_n^{(m)}(\varphi)_1$;

б) *при* $m=2$ *для выполнения равенства* (13) *необходимо и достаточно, чтобы* φ *удовлетворяло* S_N^**-условию*: *существует натуральное* $N\geqslant n+1$ *такое, что функция* $\Phi_n(\theta)=\operatorname{sign}[\varphi(\cos\theta)-P_n(\cos\theta)]$, *где* $\|\varphi-P_n\|_{L_{1,2}}=E_n^{(2)}(\varphi)_1$, *удовлетворяет равенству* $\Phi_n(\theta+\pi/N)=-\Phi_n(\theta)$ $\forall\theta\in[0,\ \pi]$.

Для доказательства теоремы используется следующий критерий выполнения (13).

Лемма 4. *Пусть* $\varphi \in L_{1,m}$ *удовлетворяет* M-*условию. Для выполнения равенства* (13) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$E_n(f_0)_\infty = \gamma_m E_n^{(m)}(\varphi)_1, \tag{14}$$

где $f_0 = \varphi * \{\operatorname{sign}[\varphi((x_0, \cdot)) - P_n((x_0, \cdot))]\}$, x_0 — *некоторая точка* S^{m-1},

$$\|\varphi - P_n\|_{L_{1,m}} = E_n^{(m)}(\varphi)_1,\ P_n \in \mathscr{P}_{n,1}.$$

Доказательство. Достаточность следует из неравенств

$$E_n(f_0)_\infty \leqslant E_{n,m,\infty}(\varphi) \leqslant \gamma_m E_n^{(m)}(\varphi)_1$$

(последнее неравенство получено с помощью леммы 1).

Необходимость. В силу компактности $W_\infty(\varphi)$ и непрерывности функционала $E_n(f)_\infty$ существует $f_1 = \varphi * h_1 \in W_\infty(\varphi)$, $\|h_1\|_{L_\infty(S^{m-1})} \leqslant 1$, для которой

$$E_{n,m,\infty}(\varphi) = E_n(f_1)_\infty. \tag{15}$$

Из равенств (2), (13), (15) получим, что существует точка $x_0 \in S^{m-1}$ такая, что выполняется неравенство

$$\int\limits_{S^{m-1}} |\varphi[(x_0, y)] - P_n[(x_0, y)]|\,dy \leqslant \left| \int\limits_{S^{m-1}} \{\varphi[(x_0, y)] - P_n[(x_0, y)]\}\, h_1(y)\,dy \right|.$$

Отсюда в силу M-условия имеем $h_1(y) = \pm \operatorname{sign}\{\varphi[(x_0, y)] - P_n[(x_0, y)]\}$ для почти всех $y \in S^{m-1}$. Равенство (14) доказано.

Доказательство теоремы 2. Неравенство $E_{n,\infty,m}(\varphi) \leqslant \gamma_m E_n^{(m)}(\varphi)_1$ очевидно, если воспользоваться леммой 1.

Предположим, выполнено равенство (13). В силу леммы 4 имеет место соотношение (14). Далее, обозначим

$$\varphi_0(y) = \varphi[(x_0, y)],\ F(t) = \operatorname{sign}[\varphi(t) - P_n(t)],$$

$$f_2(x) = \Phi(\theta) = \gamma_m \int\limits_0^\pi [\varphi(\cos\tau) - P_n(\cos\tau)] \sin^{m-2}\tau \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi F[\cos\tau\cos\theta + \cos\lambda\sin\tau\sin\theta]\,d\mu_m(\lambda)\,d\tau, \tag{16}$$

где $\theta = \theta(x)$ — угол между векторами x, $x_0 \in S^{m-1}$,

$$d\mu_m(\lambda) = \begin{cases} \left[\sin^{m-3}\lambda \Big/ \int\limits_0^\pi \sin^{m-3} t\,dt\right] d\lambda, & m > 2; \\ \delta(\lambda)\ \text{(мера Дирака)}, & m = 2. \end{cases}$$

Нетрудно проверить справедливость равенства $f_2 = (\varphi - P_n) * [F((x_0, \cdot))]$. Оно следует из формулы Функа — Гекке, полноты системы многочленов Гегенбауэра в $L_{1,m}$ и теоремы сложения для этих многочленов. Следовательно, $f_0 - f_2 \in \mathscr{P}_{n,m}$, и из (14) и леммы 1 получаем

$$E_n(\varphi_0)_1 = E_n(f_2)_\infty = \Phi(0). \tag{17}$$

В силу формулы Функа — Гекке $f_2(x)$ есть функция от $(x_0, x) = \cos\theta$ и из леммы 1 получаем, что многочлен наилучшего приближения для f_2 в $L_\infty(S^{m-1})$ имеет вид $V_n[(x_0, x)]$, $V_n \in \mathscr{P}_{n,1}$, откуда имеем

$$E_n(f_2)_\infty = \inf_{P \in \mathscr{P}_{n,1}} \max_{\theta \in [0,\pi]} |\Phi(\theta) - P(\cos\theta)|.$$

Используя (17) и теорему Чебышева об альтернансе, получаем, что существуют числа $\{\theta_k\}_{k=0}^{2n+1}$, $0 < \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{2n+1} = 2\pi$, такие, что

$$\Phi(\theta_k) = (-1)^k E_n(\varphi_0)_1,\ 0 \leqslant k \leqslant 2n+1. \tag{18}$$

Пусть теперь $m > 2$. Из (16)—(18) для почти всех $\tau \in [0, \pi]$ получаем равенство

$$\int_0^\pi F[\cos\tau\cos\theta_1 + \cos\lambda\sin\tau\sin\theta_1]\,d\mu_m(\lambda) = -F(\cos\tau). \tag{19}$$

Так как $|F(t)| = 1$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, то подынтегральное выражение в левой части (19) сохраняет знак для почти всех $\lambda \in (0, \pi)$ и, следовательно, для почти всех $\chi \in (-\theta_1, \theta_1)$; для почти всех $\tau \in (0, \pi)$ имеем

$$F(\cos(\tau + \chi)) = -F(\cos\tau). \tag{20}$$

Таким образом, мы получили, что функция $F(\cos\tau)$ имеет период 2χ для почти всех $\chi \in (-\theta_1, \theta_1)$, что противоречит условию $\varphi \notin \mathscr{P}_{n,1}$. Утверждение а) теоремы доказано.

Пусть теперь $m = 2$. Из (18) следует, что для некоторого фиксированного χ, $|\chi| \leqslant \pi/(n+1)$, имеет место (20). Так как $\Phi_n(\theta) = F(\cos\theta)$ имеет период 2χ, то существует наименьший период Φ_n вида $2\pi/N$, где $N = l\cdot\chi$; l, N — натуральные числа. Нетрудно проверить, что условие S_N^* выполнено. Необходимость утверждения б) доказана.

Если φ удовлетворяет S_N^*-условию, то $\Phi(\theta + \pi/N) = -\Phi(\theta)$ $\forall\theta \in [0, 2\pi)$; отсюда следует справедливость (18) при $\theta_k = k\pi/N$, $0 \leqslant k \leqslant 2N - 1$. Из теоремы Чебышева и леммы 4 следует справедливость достаточности условия S_N^*. Теорема доказана.

Замечание 5. Условие S_N^* близко условию A_n^*, предложенному в случае приближения периодических функций тригонометрическими многочленами С. М. Никольским [4] (см. также [6], с. 79); в [4] доказана достаточность A_n^*.

Аналог теоремы 2б) для приближения тригонометрическими многочленами получен автором [19].

Замечание 6. M-условию удовлетворяют, напр., функции из класса H, в частности, ядра $\varphi_{r\,m}$, $\Psi_{1\,3}$.

Замечание 7. Выше изучены свойства величин $E_{n,m,q}(\varphi)$ при $q = 1, \infty$. Нетрудно найти величину $E_{n,m,2}(\varphi)$, а именно,

$$E_{n,m,2}(\varphi) = (4\pi)^{(m-2)/2}\,\Gamma((m-2)/2) \max_{k \geqslant n+1} \frac{k\,!}{(k+m-3)\,!} \left| \int_{-1}^{1} \varphi(t)\, C_k^{(m-2)/2}(t)(1-t^2)^{(m-3)/2}\,dt \right|.$$

Для $q \neq 1, 2, \infty$ проблема нахождения $E_{n,m,q}(\varphi)$ остается открытой и при $m = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Favard J. Sur les meilleurs procedes d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonometriques.— Bull. Sci. Math., 1937, v. 61, p. 243—256.

2. Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций.— ДАН СССР, 1937, т. 15, с. 107—112.

3. Крейн М. Г. К теории наилучшего приближения периодических функций.— ДАН СССР, 1938, т. 18, № 4—5, с. 245—250.

4. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, т. 10, с. 207—256.

5. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. 2-е изд. М., 1965. 407 с.

6. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М., 1976. 320 с.

7. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. МГУ, 1976. 304 с.

8. Кушниренко Г. Г. Некоторые вопросы приближения непрерывных функций на единичной сфере конечными сферическими суммами.— Тр. Харьковск. политехн. ин-та. Сер. инж.-физ., 1959, т. 25, вып. 3, с. 3—22.

9. Pawelke S. Über Approximationsordnung bei Kugelfunktionen und algebraischen Polynomen.— Tohoku Math. J., 1972, v. 24, № 3, p. 473—486.

10. Lizorkin P. I., Nikolskij S. M. A theorem concerning approximation on the sphere.— Anal. Math., 1983, v. 9, № 3, p. 207—221.

11. Никольский С. М., Лизоркин П. И. К теории приближений на сфере.— Тр. МИАН СССР, 1985, т. 172, с. 272—279.

12. Камзолов А. И. О наилучшем приближении классов $W_p^\alpha(S^n)$ полиномами по сферическим гармоникам.— Матем. заметки, 1982, т. 32, № 3, с. 285—293.
13. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М., 1977. 432 с.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. 2-е изд. М., 1974. 295 с.
15. Ганзбург М. И., Пичугов С. А. Об инвариантности элементов наилучшего приближения и одной теореме Глезера.— Укр. мат. журнал, 1981, т. 33, № 5, с. 664—667.
16. Бернштейн С. Н. О многочленах, ортогональных на конечном отрезке.— Собр. соч., М., 1954, т. 2, с. 7—106.
17. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. М., 1953. 804 с.
18. Камзолов А. И. Неравенство Фавара на сфере S^n.— Вестник Моск. ун-та. Сер. матем., механ., 1981, № 6, с. 51—57.
19. Ганзбург М. И. О наилучшем гармоническом приближении сверток в L_1 и L_∞.— Изв. вузов. Матем., 1985, № 5, с. 22—27.

г. Днепропетровск

Поступили
первый вариант 06.12.1984
окончательный вариант 10.10.1986