

УДК 517.5

**ОДНОСТОРОННЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В  $L$  ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ<sup>1</sup>****А. Г. Бабенко, Ю. В. Крякин, В. А. Юдин**

Для любого  $0 < h \leq \pi$  найдена величина наилучшего одностороннего интегрального приближения характеристической функции интервала  $(-h, h)$  тригонометрическими полиномами заданного порядка.

Ключевые слова: одностороннее интегральное приближение функций полиномами.

A. G. Babenko, Yu. V. Kryakin, V. A. Yudin. One-sided approximation in  $L$  of the characteristic function of an interval by trigonometric polynomials.

For arbitrary  $0 < h \leq \pi$ , the value of the best one-sided integral approximation of the characteristic function of the interval  $(-h, h)$  by trigonometric polynomials of a given degree is found.

Keywords: one-sided integral approximation of functions by polynomials.

**1. Введение. Формулировка основного результата**

В дальнейшем используются следующие обозначения:

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  — период длины  $2\pi$ , т. е. полуинтервал  $[\alpha, \alpha + 2\pi)$  с отождествленными концами, где  $\alpha$  — произвольное фиксированное число<sup>2</sup> из  $\mathbb{R}$ ;

$L = L(\mathbb{T})$  — пространство  $2\pi$ -периодических измеримых вещественнозначных функций с нормой  $\|f\| = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt$ ;

$\mathcal{T}_n$  — подпространство тригонометрических полиномов  $\tau(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^n (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$  порядка не выше  $n$  с вещественными коэффициентами;

$$E_n(g) := \inf_{\tau \in \mathcal{T}_n} \|g - \tau\|, \quad E_n^-(g) := \inf_{\tau \in \mathcal{T}_n, \tau \leq g} \|g - \tau\|, \quad E_n^+(g) := \inf_{\tau \in \mathcal{T}_n, g \leq \tau} \|g - \tau\|$$

— величины наилучшего интегрального приближения, наилучшего интегрального приближения снизу и соответственно сверху ограниченной функции  $g \in L$  подпространством  $\mathcal{T}_n$ .

Для произвольного фиксированного числа  $h \in (0, \pi]$  обозначим через  $\chi_h$  характеристическую функцию интервала  $(-h, h)$ , периодически продолженную на  $\mathbb{R}$  с периодом  $2\pi$ . Положим

$$\mathcal{E}_n(h) := E_n(\chi_h), \quad \mathcal{E}_n^-(h) := E_n^-(\chi_h), \quad \mathcal{E}_n^+(h) := E_n^+(\chi_h).$$

Отметим, что

$$\mathcal{E}_n^-(h) = \mathcal{E}_n^+(\pi - h) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}, \quad h \in (0, \pi). \quad (1.1)$$

Отсюда с помощью классического результата Фейера (1913) о точной константе в неравенстве между равномерной и интегральной нормами неотрицательного тригонометрического полинома порядка не выше  $n$  (см. [9, ч. 2, отдел 6, § 7, задача 50]) получаем

$$\lim_{h \rightarrow \pi} \mathcal{E}_n^-(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{E}_n^+(h) = \frac{1}{n+1}.$$

<sup>1</sup>Исследования поддержаны РФФИ (проекты 11-01-00417, 11-01-00462, 11-01-00735) и УРО РАН в рамках совместного с учеными СО РАН проекта 12-С-1-1018.

<sup>2</sup>В данной работе в качестве  $\alpha$  будет выбираться число  $-\pi$  или 0.

В силу (1.1) далее будем исследовать лишь величину  $\mathcal{E}_n^-(h)$ .

Задача одностороннего приближения функции  $\text{sign } x$  и характеристической функции интервала целыми функциями экспоненциального типа и тригонометрическими полиномами изучалась в связи с приложениями в теории чисел в работах Берлинга, Сельберга и Ваалера. Установлено [19] (см. также [13, Ch. 1]), что

$$\mathcal{E}_n^-(h) \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{при любых } n \in \mathbb{N}, \quad h \in (0, \pi]. \quad (1.2)$$

В настоящей работе мы продолжаем исследование, начатое в [3], где найдено интегральное приближение характеристической функции  $\chi_h$  при любом  $h \in (0, \pi]$  тригонометрическими полиномами заданного порядка, и получаем аналогичный окончательный результат в случае одностороннего интегрального приближения.

Положим  $\lfloor \beta \rfloor = \max\{\nu \in \mathbb{Z} : \nu \leq \beta\}$ ,  $\lceil \beta \rceil = \min\{\nu \in \mathbb{Z} : \beta \leq \nu\}$ . Введем функции

$$\Lambda_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2} - \sin \frac{(n+2)x}{2}}{(n+2) \sin \frac{nx}{2} - n \sin \frac{(n+2)x}{2}}, \quad (1.3)$$

$$\lambda_n(x) = \frac{\sin x}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \sin x - \sin \left( \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil x \right) \cos \left( \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor x \right)}, \quad (1.4)$$

$$\gamma_n(x) = \frac{\sin x}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \sin x + \sin \left( \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor x \right) \cos \left( \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil x \right)}. \quad (1.5)$$

Сформулируем результат данной работы, в котором используется обозначение

$$I_j = I_{j,n} = \left( \frac{j\pi}{n+1}, \frac{(j+1)\pi}{n+1} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

**Теорема 1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

(a)  $\mathcal{E}_n^-(h) = \frac{1}{n+1}$  при  $h = \frac{j\pi}{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ ;

(b)  $\mathcal{E}_n^-(h) = \frac{h}{\pi}$  при  $h \in I_{0,n}$ ;

(c)  $\mathcal{E}_n^-(h) = \frac{h}{\pi} - \Lambda_n(h)$  при  $h \in I_{1,n}$ ;

(d)  $\mathcal{E}_n^-(h) = \frac{h}{\pi} - \sum_{k=0}^{j-1} \gamma_n(x_k)$  при  $h \in I_{2j,n}$ ,  $j = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ ,  $n \geq 2$ ,

где  $x_0, \dots, x_{j-1}$  — нули функции  $\cos \frac{nh}{2} \cos \frac{(n+2)x}{2} - \cos \frac{(n+2)h}{2} \cos \frac{nx}{2}$ , расположенные в интервале  $(0, h)$  в порядке возрастания;

(e)  $\mathcal{E}_n^-(h) = \frac{h}{\pi} - \Lambda_n(h) - \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_n(y_k)$  при  $h \in I_{2j+1,n}$ ,  $j = 1, \dots, \lceil n/2 \rceil - 1$ ,  $n \geq 3$ ,

где  $y_0, \dots, y_{j-1}$  — нули функции  $\sin \frac{nh}{2} \sin \frac{(n+2)x}{2} - \sin \frac{(n+2)h}{2} \sin \frac{nx}{2}$ , расположенные в интервале  $(0, h)$  в порядке возрастания.

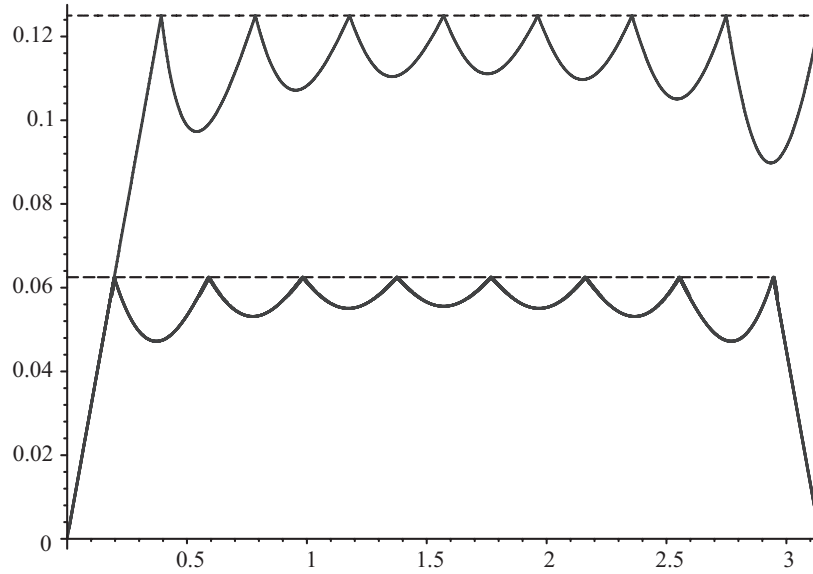


Рис. 1. Графики функций  $\mathcal{E}_7^-(h)$ ,  $\mathcal{E}_7(h)$  переменного  $h \in (0, \pi]$ .

На рис. 1 приведены графики функций  $\mathcal{E}_n^-(h)$ ,  $\mathcal{E}_n(h)$  переменного  $h \in (0, \pi]$ , а также графики постоянных функций  $\frac{1}{n+1}$ ,  $\frac{1}{2(n+1)}$  (пунктирные линии) при фиксированном значении параметра  $n = 7$ ; график функции  $\mathcal{E}_7(h)$  взят из статьи [3].

## 2. Некоторые типы условий эрмитовой интерполяции функции $\chi_h$ . Первая основная лемма

Приведем несколько условий интерполяции функции  $\chi_h$  косинус-полиномами на  $[0, \pi]$ . Пусть

$$s, r \in \{0, 1\}, \quad \ell, m \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}, \quad s + \ell \geq 1.$$

Упорядоченной четверке чисел  $(s, \ell, m, r)$  поставим в соответствие тип  $T(s, \ell, m, r)$  условий интерполяции функции  $\chi_h$  косинус-полиномом  $\tau$  минимально возможного порядка. Указанный тип характеризует расположение узлов интерполяции и их кратность. Опишем значение каждого из параметров  $s, \ell, m, r$ :

- (a) если  $s = 0$ , то 0 не является узлом интерполяции;
- (b) если  $s = 1$ , то 0 является узлом интерполяции, т. е.  $\tau(0) = 1$ ;
- (c) число  $\ell$  означает количество<sup>3</sup> узлов интерполяции  $x_1 < x_2 < \dots < x_\ell$ , расположенных в открытом интервале  $(0, h)$ , причем каждый из этих узлов имеет двойную кратность:

$$\tau(x_j) = 1, \quad \tau'(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, \ell; \quad (2.1)$$

- (d) точка  $x_{\ell+1} := h$  всегда является (простым) узлом интерполяции, т. е.  $\tau(h) = 0$ ;
- (e) число  $m$  означает количество узлов интерполяции  $x_{\ell+2} < x_{\ell+3} < \dots < x_{\ell+m+1}$ , расположенных в интервале  $(h, \pi)$ , причем каждый из этих узлов имеет двойную кратность:

$$\tau(x_j) = 0, \quad \tau'(x_j) = 0, \quad j = \ell + 2, \dots, \ell + m + 1; \quad (2.2)$$

- (f) если  $r = 0$ , то  $\pi$  не является узлом интерполяции;
- (g) если  $r = 1$ , то  $\pi$  является узлом интерполяции, т. е.  $\tau(\pi) = 0$ .

<sup>3</sup>Если  $\ell = 0$ , то в  $(0, h)$  нет узлов интерполяции. Аналогично в условии (e), если  $m = 0$ , то в  $(h, \pi)$  нет узлов интерполяции.

Косинус-полином  $\tau$  (минимально возможного порядка), реализующий тип  $T(s, \ell, m, r)$  условной эрмитовой интерполяции функции  $\chi_h$ , для краткости будем называть *косинус-полиномом типа  $T(s, \ell, m, r)$* ; иногда будем говорить, что *косинус-полином  $\tau$  имеет тип  $T(s, \ell, m, r)$* . Порядок этого полинома равен количеству условий интерполяции минус один, т. е.

$$\deg \tau = s + r + 2(\ell + m). \tag{2.3}$$

С помощью замены  $t = \cos x$  придем к соответствующей задаче эрмитовой интерполяции характеристической функции полуинтервала  $(\cos h, 1]$  алгебраическим многочленом  $P(t)$ , который связан с косинус-полиномом  $\tau(x)$  соотношением

$$P(\cos x) = \tau(x), \quad x \in [0, \pi]. \tag{2.4}$$

Известно, что в случае более общих условий<sup>4</sup> интерполяционный алгебраический многочлен Эрмита (минимально возможной степени) существует и является единственным. Явные формулы для указанного многочлена и его степени приведены в монографии [4, гл. 1, § 11]. В случае, когда все узлы интерполяции имеют двойную кратность, указанная формула имеет довольно простой вид (см. [4, гл. 1, § 11, п. 1, формулы (17), (24)]).

Для оценки сверху величины  $\mathcal{E}_n^-(h)$  и построения соответствующего экстремального косинус-полинома нам понадобится лемма, которая для полинома  $\tau$  типа  $T(0, \ell, m, 0)$  (а точнее, для алгебраического многочлена  $P$ , связанного с указанным полиномом  $\tau$  соотношением (2.4)) является частным случаем результата, независимо установленного в 1880-е годы Марковым [8, ст. 1] и Стильтесом [17, 18] (см. [12, пп. 3.411], а также леммы 9, 9' в [10, гл. 1, разд. 1.2, с. 67–69] и одноименные леммы в [11, разд. “Постников А.Г. Тауберова теория и ее применения”, § 12, с. 312–314]). Общий случай для косинус-полиномов  $\tau$  типа  $T(s, \ell, m, r)$  доказывается аналогично. Для полноты изложения приведем с доказательством следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $s, r \in \{0, 1\}$ ,  $\ell, m \in \mathbb{Z}_+$ ,  $s + \ell \geq 1$ ,  $h \in (0, \pi)$ ,  $\tau$  — интерполяционный косинус-полином (минимально возможного порядка), реализующий тип  $T(s, \ell, m, r)$  условной интерполяции функции  $\chi_h$ . Тогда

$$\tau(x) \leq \chi_h(x) \quad \text{при всех } x \in [-\pi, \pi]. \tag{2.5}$$

**Доказательство.** Обозначим через  $n$  порядок косинус-полинома  $\tau$ ; по формуле (2.3) находим  $n = s + r + 2(\ell + m)$ . Производная полинома  $\tau$  представима в виде произведения  $\tau'(x) = (\sin x)\theta(x)$ , в котором  $\theta$  — некоторый косинус-полином порядка  $\deg \theta = n - 1 = s + r + 2(\ell + m) - 1$ .

Производная  $\tau'(x)$  обращается в нуль на концах отрезка  $[0, \pi]$ . Посчитаем количество попарно различных нулей производной  $\tau'(x)$ , расположенных внутри открытого интервала  $(0, \pi)$ . В силу (2.1) и (2.2) имеем

$$\tau'(x_j) = 0 \quad \text{при } j = 1, \dots, \ell \quad \text{и} \quad j = \ell + 2, \dots, \ell + m + 1,$$

причем узлы  $x_j$  лежат внутри интервала  $(0, \pi)$ , общее их количество равняется сумме  $\ell + m$ .

Количество интервалов  $(x_j, x_{j+1})$ , на концах которых полином  $\tau$  принимает одинаковые значения (либо единичные, либо нулевые), равняется  $s + \ell + m + r - 1$ ; здесь мы учли, что точка  $x_{\ell+1} := h$  всегда является узлом интерполяции, т. е.  $\tau(h) = 0$ . Внутри каждого такого интервала производная  $\tau'(x)$  обращается в нуль. Таким образом, общее количество попарно различных нулей производной  $\tau'(x)$  в открытом интервале  $(0, \pi)$  не меньше, чем число  $d := s + r + 2(\ell + m) - 1$ . Число  $d$  совпадает с порядком косинус-полинома  $\theta$ , т. е.  $d = \deg \theta$ . Поэтому производная  $\tau'$  не имеет на  $[0, \pi]$  нулей, отличных от перечисленных выше. Обозначим нули производной  $\tau'$  на  $[0, \pi]$  так:  $y_0 := 0 < y_1 < \dots < y_d < y_{d+1} := \pi$ .

---

<sup>4</sup>В каждом узле интерполируется сама функция и несколько подряд идущих ее производных, при этом количество интерполируемых значений производных зависит от номера узла.

По условию леммы  $s + \ell \geq 1$ . Отсюда следует, что в полуинтервале  $[0, h)$  содержится хотя бы один узел интерполяции; обозначим через  $x^*$  максимальный из них ( $x^* = 0$ , если  $\ell = 0$ , и  $x^* = x_\ell$ , если  $\ell \geq 1$ ).

Поскольку  $\tau(x^*) = 1$ ,  $\tau(h) = 0$ , то в интервале  $(x^*, h)$  производная  $\tau'(x)$  будет отрицательной. Отсюда однозначно определяется знак производной в любом интервале

$$(y_j, y_{j+1}), \quad j = 0, \dots, d,$$

а также точки локальных минимумов и максимумов полинома  $\tau$ . В частности,  $x^*$  является точкой локального максимума. Анализируя остальные точки локальных экстремумов полинома  $\tau$ , лежащих на отрезке  $[0, \pi]$ , приходим к неравенству (2.5). Лемма доказана.  $\square$

В качестве примера приведем конструкцию косинус-полинома  $\tau$  типа  $T(0, \ell, m, 0)$ .

Обозначим через  $\vartheta(x)$  интерполяционный косинус-полином Эрмита, который интерполирует с двойной кратностью функцию

$$(\cos x - \cos h)\chi_h(x)$$

в узлах  $x_1 < \dots < x_\ell < x_{\ell+1} = h < x_{\ell+2} < \dots < x_{\ell+m+1}$ , расположенных в открытом интервале  $(0, \pi)$  (в узле  $x_{\ell+1} = h$  полагаем  $\vartheta(h) = \vartheta'(h) = 0$ ). Явный вид полинома  $\vartheta(x)$  легко находится с помощью формул (17), (24) из [4, гл. 1, § 11, п. 1]. Несложно убедиться в том, что косинус-полином  $\tau(x) = \frac{\vartheta(x)}{\cos x - \cos h}$  имеет тип  $T(0, \ell, m, 0)$ .

Ниже (см. рис. 2 в конце разд. 6) таким способом построен косинус-полином  $\tau_h \in \mathcal{T}_{10}$  типа  $T(0, 2, 3, 0)$ , являющийся полином наилучшего интегрального приближения снизу функции  $\chi_h$  при  $h = 9\pi/22$ .

### 3. Квадратурная формула гауссовского типа для тригонометрических полиномов. Доказательство утверждения (b) теоремы 1

Хорошо известна (см. [5, т. 2, гл. 10, формула (2.5)]) следующая квадратурная формула:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \tau\left(\xi + \frac{2k\pi}{n+1}\right), \quad (3.1)$$

которая выполняется для произвольного полинома  $\tau \in \mathcal{T}_n$  при любом фиксированном  $\xi \in \mathbb{R}$ .

При  $\xi = \pi/(n+1)$  формула (3.1) приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \tau(t_k), \quad t_k = \frac{(2k+1)\pi}{n+1},$$

где  $\tau$  — произвольный полином из  $\mathcal{T}_n$ . С помощью этой формулы несложно получить

**Следствие.** Пусть  $\tau \in \mathcal{T}_n$ ,  $\tau(x) \leq 0$  при  $\frac{\pi}{n+1} \leq |x| \leq \pi$ . Тогда  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx \leq 0$ .

**Доказательство** утверждения (b) теоремы 1.

Пусть  $0 < h \leq \frac{\pi}{n+1}$  и  $\tau$  — произвольный полином из  $\mathcal{T}_n$ , удовлетворяющий неравенству  $\tau(x) \leq \chi_h(x)$  при всех  $x \in [-\pi, \pi]$ . Тогда  $\tau(x) \leq 0$  при  $h \leq |x| \leq \pi$ ; а поскольку  $0 < h \leq \frac{\pi}{n+1}$ ,

то  $\tau(x) \leq 0$  при  $\frac{\pi}{n+1} \leq |x| \leq \pi$  и в силу следствия  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx \leq 0$ . Отсюда получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\chi_h(x) - \tau(x)\} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_h(x) dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_h(x) dx = \frac{h}{\pi}.$$

Поэтому имеет место оценка снизу  $\mathcal{E}_n^-(h) \geq h/\pi$ . Полином  $\tau(x) \equiv 0$  влечет оценку сверху  $\mathcal{E}_n^-(h) \leq h/\pi$ . Утверждение (b) теоремы 1 доказано.

#### 4. Вторая основная лемма. Доказательство утверждения (a) теоремы 1

Приведем утверждение (лемма 2), с помощью которого в дальнейшем будет получена оценка снизу искомой величины  $\mathcal{E}_n^-(h)$  при  $\pi/(n+1) < h < \pi$ . Доказательство леммы 2 в случае непрерывной функции  $g$  содержится в [6, гл. 1, § 1.7, теорема 1.7.5] и практически дословно переносится на случай произвольной ограниченной функции  $g \in L$ .

**Лемма 2.** Пусть квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) dx \approx \sum_{k=1}^m p_k u(x_k)$$

с неотрицательными коэффициентами  $p_1, \dots, p_m$  точна на  $\mathcal{T}_n$ . Тогда для любой ограниченной функции  $g \in L$  выполняется неравенство

$$E_n^-(g) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx - \sum_{k=1}^m p_k g(x_k).$$

Для произвольного фиксированного числа  $h \in (0, \pi]$  обозначим через  $\chi_{(0,2h)}$  характеристическую функцию интервала  $(0, 2h)$ , периодически продолженную на  $\mathbb{R}$  с периодом  $2\pi$ . В силу инвариантности подпространства  $\mathcal{T}_n$  относительно любого сдвига имеем

$$\mathcal{E}_n^-(h) := E_n^-(\chi_h) = E_n^-(\chi_{(0,2h)}). \tag{4.1}$$

Применим лемму 2 для оценки снизу величины

$$\mathcal{E}_n^-(h_j), \quad h_j = \frac{j\pi}{n+1}, \quad j = 1, \dots, n+1,$$

которая вместе с оценкой сверху (1.2) позволит обосновать утверждение (a) теоремы 1.

Следует сказать, что утверждение (a) теоремы 1 является простым следствием результата Маркова — Стилтеса, процитированного выше (см. абзац перед леммой 1 в разд. 2), а также аналога леммы 2 для  $E_n^+(g)$  и соотношения (1.1). Однако для полноты изложения приведем

**Доказательство** утверждения (a) теоремы 1.

Пусть  $h_j = \frac{j\pi}{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ . При  $\xi = 0$  формула (3.1) приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \tau(x_k), \quad x_k = \frac{2k\pi}{n+1}, \quad \tau \in \mathcal{T}_n.$$

Отсюда с помощью (4.1) и леммы 2 получаем оценку снизу

$$\mathcal{E}_n^-(h_j) = E_n^-(\chi_{(0,2h_j)}) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{(0,2h_j)}(x) dx - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \chi_{(0,2h_j)}(x_k) = \frac{1}{n+1},$$

которая вместе с (1.2) влечет утверждение (a) теоремы 1.

## 5. Квадратурные формулы с несколькими фиксированными узлами

Доказательство утверждений (c)–(e) теоремы 1 базируется на леммах 1, 2. В свою очередь для применения указанных лемм нам понадобятся квадратурные формулы с несколькими фиксированными узлами, при этом наивысшей степени точности. Такие формулы для алгебраических многочленов изучались давно, начиная с исследований Гаусса, Кристоффеля, Лобатто, Мелера, Маркова. История по этой теме содержится в монографии [12]. Большой интерес представляют явные формулы для коэффициентов указанных квадратурных формул (в частности, знаки коэффициентов) и расположение узлов, что тесно связано с полиномиальными интерполяционно-ортогональными базисами и ортогональными многочленами. Важные результаты в этой области получили Фейер, Стеклов, Эрдеш, Туран, Винстон, Шохат и др. (частичное описание упомянутых результатов и соответствующую библиографию можно найти в работах [2; 14; 15]).

В. А. Стеклов [16] (см. [15, разд. 2, теорема 3]) установил, что квадратурная формула наивысшей степени точности с одним фиксированным узлом (вне зависимости от его расположения) имеет только положительные коэффициенты, правда, один из свободных узлов этой формулы может оказаться вне промежутка интегрирования. К. Винстон [20, разд. 3] для интеграла с весом общего вида нашел явные формулы для коэффициентов соответствующих квадратурных формул наивысшей степени точности с фиксированными узлами в случае, когда они лежат на границе или вне промежутка интегрирования. Я. А. Шохат [15, разд. 2, п. 4] нашел аналогичные формулы и для случая, когда некоторые фиксированные узлы лежат внутри промежутка интегрирования.

Нам понадобятся квадратурные формулы, выражающие среднее значение косинус-полинома на периоде через линейную комбинацию его значений в точках из отрезка  $[0, \pi]$ . Точнее, нам нужны квадратурные формулы с заданным числом узлов (некоторые из них являются фиксированными), причем эти квадратурные формулы должны быть наивысшей степени точности, т. е. быть справедливыми для косинус-полиномов максимально возможного порядка. Для наших целей достаточно будет четырех типов указанных квадратурных формул, а именно: формулы с одним фиксированным узлом  $h$ ; двух формул с двумя фиксированными узлами:  $0, h$  и соответственно  $h, \pi$ ; а также одной формулы с тремя фиксированными узлами  $0, h, \pi$ . Для построения этих формул будем использовать частный случай известного утверждения, которое в [15, разд. 2, теорема 1] (см. также [7, гл. 9]) приведено в терминах алгебраических многочленов, однако с помощью косинус-замены легко переформулируется в терминах косинус-полиномов.

**Теорема 2.** Пусть точки  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$  принадлежат отрезку  $[0, \pi]$ , а точки  $x_1 < x_2 < \dots < x_\nu$  принадлежат множеству  $[0, \pi] \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ . Тогда для того, чтобы нашлись числа  $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_\nu$  такие, что для любого косинус-полинома  $\tau$  порядка не выше  $2\nu + m - 1$  выполнялась формула

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tau(x) dx = \sum_{\ell=1}^m A_\ell \tau(\alpha_\ell) + \sum_{k=1}^\nu B_k \tau(x_k) \quad (5.1)$$

необходимо и достаточно, чтобы полином

$$(\cos x - \cos x_1)(\cos x - \cos x_2) \cdots (\cos x - \cos x_\nu) \quad (5.2)$$

был ортогонален любому косинус-полиному порядка не выше  $\nu - 1$  с весом

$$(\cos x - \cos \alpha_1)(\cos x - \cos \alpha_2) \cdots (\cos x - \cos \alpha_m).$$

Отметим, что если для любого косинус-полинома  $\tau \in \mathcal{T}_{2\nu+m-1}$  справедлива формула (5.1), то для произвольного тригонометрического полинома  $f \in \mathcal{T}_{2\nu+m-1}$  имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \sum_{\ell=1}^m A_{\ell} \frac{f(\alpha_{\ell}) + f(-\alpha_{\ell})}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} B_k \frac{f(x_k) + f(-x_k)}{2}. \quad (5.3)$$

Напомним некоторые известные факты и термины, связанные с квадратурной формулой (5.1). Точки  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  и  $x_1, \dots, x_{\nu}$  называют соответственно *фиксированными* и *свободными* узлами квадратурной формулы (5.1), а числа  $A_{\ell}, B_k$  — ее *коэффициентами*.

Таким образом, числа  $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_{\nu}, x_1, \dots, x_{\nu}$  являются параметрами, которыми можно распоряжаться для того, чтобы сделать максимальной размерность пространства косинус-полиномов, на котором формула (5.1) была бы точна. В отличие от указанных параметров, числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  являются фиксированными и управлять ими мы не имеем права.

Поскольку количество свободных параметров равно  $2\nu + m$ , то естественно предположить, что их можно выбрать так, чтобы квадратурная формула (5.1) была точна для произвольного косинус-полинома порядка  $2\nu + m - 1$  (ведь у такого полинома количество коэффициентов равняется  $2\nu + m$ ). Указанный максимальный порядок полинома называют *наивысшей степенью точности* квадратурной формулы (5.1).

Обратим внимание на то, что утверждение теоремы 2 можно переформулировать в следующей равносильной форме: *косинус-полином*

$$\psi(x) = (\cos x - \cos x_1) \cdots (\cos x - \cos x_{\nu}) (\cos x - \cos \alpha_1) \cdots (\cos x - \cos \alpha_m) \quad (5.4)$$

порядка  $\nu + m$  должен быть ортогональным любому косинус-полиному порядка  $\leq \nu - 1$  с единичным весом.

Это означает, что в разложении полинома  $\psi$  по косинусам коэффициенты с номерами  $0, \dots, \nu - 1$  должны равняться нулю, т. е. этот полином представляет собой линейную комбинацию подряд идущих гармоник с номерами  $\nu, \dots, \nu + m$ . Иными словами, для полинома  $\psi$  одновременно с представлением (5.4) должно иметь место и такое представление:

$$\psi(x) = a_{\nu} \cos \nu x + a_{\nu+1} \cos(\nu + 1)x + \dots + a_{\nu+m} \cos(\nu + m)x. \quad (5.5)$$

Заметим, что в силу (5.4) полином  $\psi$  обращается в нуль во всех узлах квадратурной формулы, в том числе и в фиксированных точках  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ . Отсюда с помощью (5.5) получаем еще одно важное представление для  $\psi$  в виде определителя

$$\psi(x) = \begin{vmatrix} c_{\nu}(\alpha_1) & c_{\nu+1}(\alpha_1) & \dots & c_{\nu+m}(\alpha_1) \\ c_{\nu}(\alpha_2) & c_{\nu+1}(\alpha_2) & \dots & c_{\nu+m}(\alpha_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{\nu}(\alpha_m) & c_{\nu+1}(\alpha_m) & \dots & c_{\nu+m}(\alpha_m) \\ c_{\nu}(x) & c_{\nu+1}(x) & \dots & c_{\nu+m}(x) \end{vmatrix},$$

здесь

$$c_j(x) := \cos jx.$$

Укажем на связь изучаемых квадратурных формул с ядрами Кристоффеля — Дарбу (см. [12]). Для этого рассмотрим частный случай квадратурной формулы (5.1) с одним фиксированным узлом  $\alpha$  и  $\nu$  свободными узлами  $x_1, \dots, x_{\nu}$ . В этом случае наивысшая степень точности равняется  $2\nu + 1 - 1 = 2\nu$ , а полином  $\psi$  приобретает вид

$$\psi(x) = \begin{vmatrix} c_{\nu}(\alpha) & c_{\nu+1}(\alpha) \\ c_{\nu}(x) & c_{\nu+1}(x) \end{vmatrix} = \cos \nu \alpha \cos(\nu + 1)x - \cos(\nu + 1)\alpha \cos \nu x.$$

Ясно, что искомые свободные узлы  $x_1, \dots, x_{\nu}$  совпадают с нулями дроби

$$\frac{\psi(x)}{\cos x - \cos \alpha} = \frac{\cos \nu \alpha \cos(\nu + 1)x - \cos(\nu + 1)\alpha \cos \nu x}{\cos x - \cos \alpha}.$$



В свою очередь, эта дробь является ядром Кристоффеля — Дарбу

$$K_\nu(\alpha, x) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\nu} \cos j\alpha \cos jx = \frac{\cos \nu\alpha \cos(\nu+1)x - \cos(\nu+1)\alpha \cos \nu x}{\cos x - \cos y},$$

построенным по системе  $\{1, \sqrt{2} \cos x, \sqrt{2} \cos 2x, \dots\}$ , ортонормированной относительно скалярного произведения  $(f, g) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)g(x) dx$ .

Для квадратурной формулы наивысшей степени точности с несколькими фиксированными узлами имеет место аналогичная связь с ядром Кристоффеля — Дарбу, построенным по системе ортонормированных косинус-полиномов относительно взвешенного скалярного произведения  $(f, g)_v := \int_0^\pi f(x)g(x)v(x) dx$ , где функция  $v$  выражается через фиксированные узлы<sup>5</sup>.

## 6. Доказательство утверждений (c)–(e) теоремы 1

Доказательство теоремы 1 основано на квадратурных формулах наивысшей степени точности. Для интегрального приближения снизу функции  $\chi_h$  полиномами четного порядка  $n = 2\nu$  используются квадратурные формулы с одним фиксированным узлом  $h$  и тремя фиксированными узлами  $0, h, \pi$ . Эти формулы позволяют получить теорему 1 в случае приближения полиномами четного порядка соответственно для  $h$ , принадлежащих четным  $I_{2k}$  и нечетным  $I_{2k+1}$  интервалам (см. (1.6)). Случай четных интервалов рассмотрен в лемме 3, а случай нечетных — в лемме 4. Аналогично, для приближения  $\chi_h$  снизу полиномами нечетного порядка применяются леммы 5, 6 с двумя фиксированными узлами  $0, h$  и  $h, \pi$  соответственно. В леммах 3–6 используется понятие типа  $T(s, \ell, m, r)$  для косинус-полинома, введенного в разд. 2.

**Лемма 3.** Пусть  $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $x_0 \in I_{0,n}$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

(a) полином

$$\cos \frac{nx_0}{2} \cos \frac{(n+2)x}{2} - \cos \frac{(n+2)x_0}{2} \cos \frac{nx}{2} = \cos \nu x_0 \cos(\nu+1)x - \cos(\nu+1)x_0 \cos \nu x$$

имеет в открытом интервале  $(0, \pi)$  ровно  $1 + n/2$  нулей  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n/2}$ ;

(b) нуль  $x_k = x_k(x_0)$  с номером  $k = 0, 1, \dots, n/2$  возрастая, пробегает интервал  $I_{2k,n}$ , когда  $x_0$  пробегает интервал  $I_{0,n}$ ;

(c) для любого  $\tau \in \mathcal{T}_n$  справедлива квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \sum_{k=0}^{n/2} \gamma_n(x_k) \frac{\tau(x_k) + \tau(-x_k)}{2}, \quad (6.1)$$

где функция  $\gamma_n(x)$  определена формулой (1.5), причем  $\gamma_n(x) > 0$  при любом  $x \in (0, \pi)$ ;

(d) для произвольного  $k = 1, \dots, n/2$  и любого  $h \in I_{2k,n}$  полином

$$\cos \frac{nh}{2} \cos \frac{(n+2)x}{2} - \cos \frac{(n+2)h}{2} \cos \frac{nx}{2}$$

имеет в открытом интервале  $(0, \pi)$  ровно  $1 + n/2$  нулей  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n/2}$ , причем  $x_k = h$  и найдется косинус-полином  $\tau_h \in \mathcal{T}_n$  типа  $T(0, k, m, 0)$ ,  $k + m = n/2$ , удовлетворяющий следующим условиям:  $\tau_h(x) \leq \chi_h(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_h(x_s) = \chi_h(x_s)$  при  $s = 0, 1, \dots, n/2$ .

<sup>5</sup>Если некоторые фиксированные узлы расположены внутри интервала  $(0, \pi)$ , то функция  $v$  является знакопеременной.

**Доказательство.** Как упоминалось выше, способ построения квадратурных формул наивысшей степени точности с заданным числом фиксированных узлов и с заданным числом свободных узлов известен (см. [20, разд. 3; 15, разд. 2, п. 4]). Он основан на ядрах Кристоффеля — Дарбу (см. [12]).

Для полноты изложения обоснуем квадратурную формулу (6.1) наивысшей степени точности с одним фиксированным узлом  $x_0$  и докажем утверждения леммы 3, характеризующие свойства коэффициентов и узлов этой квадратурной формулы.

В рассматриваемом случае ядро Кристоффеля — Дарбу

$$K_\nu(y, x) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\nu} \cos jy \cos jx = \frac{\cos \nu y \cos(\nu + 1)x - \cos(\nu + 1)y \cos \nu x}{\cos x - \cos y} \quad (6.2)$$

строится по системе косинусов  $\{1, \sqrt{2} \cos x, \sqrt{2} \cos 2x, \dots\}$ , ортонормированной относительно скалярного произведения

$$(f, g) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)g(x) dx.$$

С помощью (6.2) и правила Лопиталья получаем известные соотношения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_\nu(y, x) dx = 1; \quad (6.3)$$

$$0 < K_\nu(y, y) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\nu} \cos^2 jy = \frac{(\nu + 1) \cos \nu y \sin(\nu + 1)y - \nu \cos(\nu + 1)y \sin \nu y}{\sin y}, \quad (6.4)$$

для  $y = 0, \pi$  значение дроби в последней части (6.4) считаем равным  $2\nu + 1$ .

Искомый косинус-полином (5.2) представляет собой ядро Кристоффеля — Дарбу (6.2) с фиксированным значением первой переменной  $y = x_0$

$$K_\nu(x_0, x) = \frac{\cos \nu x_0 \cos(\nu + 1)x - \cos(\nu + 1)x_0 \cos \nu x}{\cos x - \cos x_0} = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\nu} \cos jx_0 \cos jx. \quad (6.5)$$

Соответствующая рассматриваемому случаю квадратурная формула (5.3) на  $\mathcal{T}_{2\nu}$  приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \gamma_0 \frac{\tau(x_0) + \tau(-x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_k \frac{\tau(x_k) + \tau(-x_k)}{2}, \quad (6.6)$$

где  $x_1, \dots, x_\nu$  — попарно различные нули полинома (6.5), расположенные на  $[0, \pi]$ .

В работе [2, разд. 4] показано, что условие  $\left| \frac{\cos(\nu + 1)x_0}{\cos \nu x_0} \right| \leq 1$  является необходимым и достаточным для существования указанных нулей. Кроме того, для любого  $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2\nu + 1}\right]$  полином (6.5) имеет на  $[0, \pi]$  ровно  $\nu$  нулей  $x_1 < x_2 < \dots < x_\nu$ , причем нуль  $x_k = x_k(x_0)$  с номером  $k = 1, \dots, \nu$ , монотонно возрастая, пробегает отрезок  $\left[\frac{2k\pi}{2\nu + 1}, \frac{(2k + 1)\pi}{2\nu + 1}\right]$ , когда  $x_0$  меняется от 0 до  $\frac{\pi}{2\nu + 1}$ .

Перейдем к вычислению коэффициентов квадратурной формулы (6.6). Положим

$$w(x) := \cos \nu x_0 \cos(\nu + 1)x - \cos(\nu + 1)x_0 \cos \nu x,$$

$$w_k(x) := \frac{w(x)}{\cos x - \cos x_k} = \frac{\cos \nu x_0 \cos(\nu + 1)x - \cos(\nu + 1)x_0 \cos \nu x}{\cos x - \cos x_k}, \quad k = 0, \dots, \nu.$$

Пусть  $x_0 \in [0, \pi]$  и  $\cos \nu x_0 \neq 0$ . Тогда согласно теореме 1 из [2, разд. 2] при всех  $k = 0, \dots, \nu$  выполняется равенство

$$\frac{K_\nu(x_k, x)}{K_\nu(x_k, x_k)} = \frac{w_k(x)}{w_k(x_k)};$$

и, следовательно,

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K_\nu(x_k, x)}{K_\nu(x_k, x_k)} dx.$$

Отсюда с помощью (6.3) и (6.4) получаем

$$\begin{aligned} 0 < \gamma_k &= \frac{1}{K_\nu(x_k, x_k)} = \frac{\sin x_k}{(\nu + 1) \cos \nu x_k \sin(\nu + 1)x_k - \nu \cos(\nu + 1)x_k \sin \nu x_k} \\ &= \frac{\sin x_k}{\left[ \frac{n}{2} \right] \sin x_k + \sin \left( \left[ \frac{n+2}{2} \right] x_k \right) \cos \left( \left[ \frac{n}{2} \right] x_k \right)}, \quad k = 0, \dots, \nu. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждения (a)–(c) доказаны.

Утверждение (d) следует из утверждения (b) и леммы 1.  $\square$

**Лемма 4.** Пусть  $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $x_0 \in I_{1,n}$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

(a) полином

$$\sin \frac{nx_0}{2} \sin \frac{(n+2)x}{2} - \sin \frac{(n+2)x_0}{2} \sin \frac{nx}{2}$$

имеет на полуинтервале  $(0, \pi]$  ровно  $1 + n/2$  нулей:  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n/2} = \pi$ ;

(b) нуль  $x_k = x_k(x_0)$  с номером  $k = 0, \dots, n/2 - 1$ , возрастая, пробегает интервал  $I_{2k+1,n}$ , когда  $x_0$  пробегает  $I_{1,n}$ ;

(c) для любого  $\tau \in \mathcal{T}_n$  справедлива квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \Lambda_n(x_0)\tau(0) + \sum_{k=0}^{n/2} \lambda_n(x_k) \frac{\tau(x_k) + \tau(-x_k)}{2}, \quad (6.7)$$

где функция  $\Lambda_n(x)$  определена формулой (1.3), функция  $\lambda_n(x)$  определена формулой (1.4) при  $x \in (0, \pi)$  и  $\lambda_n(\pi) = \Lambda_n(\pi - x_0)$ , причем все коэффициенты  $\Lambda_n(x_0), \lambda_n(x_0), \lambda_n(x_1), \dots, \lambda_n(x_{n/2})$  неотрицательные;

(d) для произвольного  $k = 0, \dots, n/2 - 1$  и любого  $h \in I_{2k+1,n}$  полином

$$\sin \frac{nh}{2} \sin \frac{(n+2)x}{2} - \sin \frac{(n+2)h}{2} \sin \frac{nx}{2}$$

имеет на  $(0, \pi]$  ровно  $1 + n/2$  нулей  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n/2} = \pi$ , причем  $x_k = h$  и найдется косинус-полином  $\tau_h \in \mathcal{T}_n$  типа  $T(1, k, m, 1)$ ,  $k + m = n/2 - 1$ , удовлетворяющий следующим условиям:  $\tau_h(x) \leq \chi_h(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_h(0) = \chi_h(0)$ ,  $\tau_h(x_s) = \chi_h(x_s)$  при  $s = 0, \dots, n/2$ .

Приведем квадратурную формулу с фиксированными узлами  $0, x_0$  (лемма 5) и квадратурную формулу с фиксированными узлами  $x_0, \pi$  (лемма 6), которые точны на множестве тригонометрических полиномов нечетного порядка  $n = 2\nu - 1$ . Напомним, что  $[\xi]$  означает максимальное целое число, не превосходящее числа  $\xi$ .

**Лемма 5.** Пусть  $n = 2\nu - 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $x_0 \in I_{1,n}$ . Тогда выполняются утверждения:

(a) функция

$$\sin \frac{nx_0}{2} \sin \frac{n+2}{2}x - \sin \frac{n+2}{2}x_0 \sin \frac{nx}{2}$$

имеет в интервале  $(0, \pi)$  ровно  $1 + \lfloor n/2 \rfloor$  нулей:  $x_0 < x_1 < \dots < x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ ;

(b) нуль  $x_k = x_k(x_0)$  с номером  $k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ , возрастая, пробегает интервал  $I_{2k+1, n}$ , когда  $x_0$  пробегает  $I_{1, n}$ ;

(c) для любого  $\tau \in \mathcal{T}_n$  справедлива квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \Lambda_n(x_0)\tau(0) + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \lambda_n(x_k) \frac{\tau(x_k) + \tau(-x_k)}{2}, \quad (6.8)$$

где функции  $\Lambda_n(x)$ ,  $\lambda_n(x)$  определены формулами (1.3), (1.4) соответственно, причем все коэффициенты  $\Lambda_n(x_0)$ ,  $\lambda_n(x_0), \dots, \lambda_n(x_{\lfloor n/2 \rfloor})$  неотрицательные;

(d) для произвольного  $k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$  и любого  $h \in I_{2k+1, n}$  функция

$$\sin \frac{nh}{2} \sin \frac{n+2}{2}x - \sin \frac{n+2}{2}h \sin \frac{nx}{2}$$

имеет в интервале  $(0, \pi)$  ровно  $\lfloor n/2 \rfloor$  нулей  $x_0 < x_1 < \dots < x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ , причем  $x_k = h$  и найдется косинус-полином  $\tau_h \in \mathcal{T}_n$  типа  $T(1, k, m, 0)$ ,  $k + m = \lfloor n/2 \rfloor = \nu - 1$ , удовлетворяющий условиям:  $\tau_h(x) \leq \chi_h(x)$  для  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_h(0) = \chi_h(0)$ ,  $\tau_h(x_s) = \chi_h(x_s)$  при  $s = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ .

**Лемма 6.** Пусть  $n = 2\nu - 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $\nu \geq 2$ ,  $x_0 \in I_{0, n}$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

(a) функция

$$\cos \frac{nx_0}{2} \cos \frac{n+2}{2}x - \cos \frac{n+2}{2}x_0 \cos \frac{nx}{2}$$

имеет в интервале  $(0, \pi)$  ровно  $1 + \lfloor n/2 \rfloor$  нулей:  $x_0 < x_1 < \dots < x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ ;

(b) нуль  $x_k = x_k(x_0)$  с номером  $k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ , монотонно возрастая, пробегает интервал  $I_{2k, n}$ , когда  $x_0$  пробегает интервал  $I_{0, n}$ ;

(c) для любого  $\tau \in \mathcal{T}_n$  справедлива квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \Lambda_n(\pi - x_0)\tau(\pi) + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \gamma_n(x_k) \frac{\tau(x_k) + \tau(-x_k)}{2}, \quad (6.9)$$

где функции  $\Lambda_n(x)$ ,  $\gamma_n(x)$  определены формулами (1.3), (1.5) соответственно, причем все коэффициенты  $\Lambda_n(\pi - x_0)$ ,  $\gamma_n(x_0), \dots, \gamma_n(x_{\lfloor n/2 \rfloor})$  неотрицательные;

(d) для произвольного  $k = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$  и любого  $h \in I_{2k, n}$  функция

$$\cos \frac{nh}{2} \cos \frac{n+2}{2}x - \cos \frac{n+2}{2}h \cos \frac{nx}{2}$$

имеет в интервале  $(0, \pi)$  ровно  $1 + \lfloor n/2 \rfloor$  нулей  $x_0 < x_1 < \dots < x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ , причем  $x_k = h$  и найдется косинус-полином  $\tau_h \in \mathcal{T}_n$  типа  $T(0, k, m, 1)$ ,  $k + m = \lfloor n/2 \rfloor = \nu - 1$ , удовлетворяющий условиям:  $\tau_h(x) \leq \chi_h(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_h(\pi) = \chi_h(\pi)$ ,  $\tau_h(x_s) = \chi_h(x_s)$  при  $s = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ .

Леммы 4, 5, 6 доказываются по схеме доказательства леммы 3. Отметим также, что утверждения (a), (c) лемм 4, 5 содержатся в более общем утверждении [1, лемма 1]; кроме того, доказательство леммы 6 можно получить с помощью леммы 5 и замены  $x$  на  $\pi - x$ .

На рис. 2 ниже приведены графики на отрезке  $[0, \pi]$  функции  $\chi_h$  и косинус-полинома  $\tau_h \in \mathcal{T}_{10}$  ее наилучшего интегрального приближения снизу при  $h = 9\pi/22$ . Полином  $\tau_h$  построен с помощью леммы 3 и конструкции, описанной в конце разд. 2.

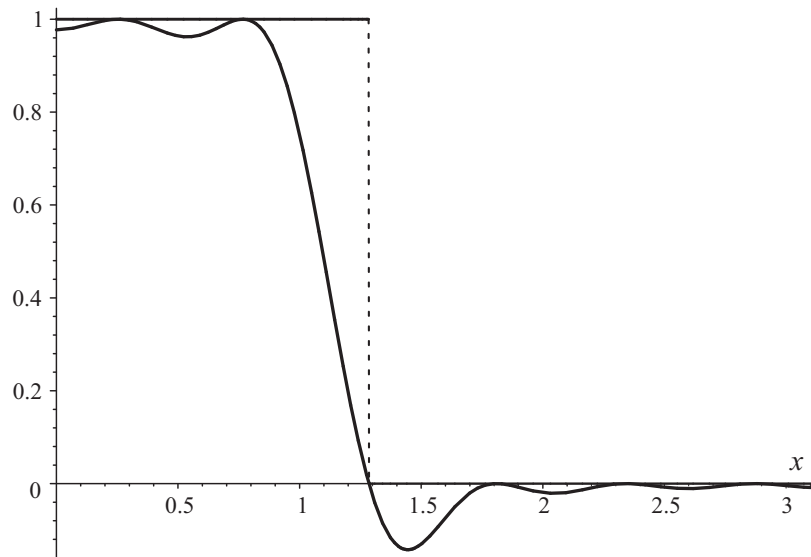


Рис. 2. Графики  $\chi_h$  и  $\tau_h \in \mathcal{T}_{10}$  на  $[0, \pi]$  при  $h = 9\pi/22$ .

Доказательство утверждений (c)–(e) теоремы 1 вытекает из лемм 2–6. Подробнее, для  $h \in I_{2j+1} = I_{2j+1,n}$  (см. (1.6)) оценка снизу величины  $\mathcal{E}_n^-(h)$  получается на основе леммы 2 с применением квадратурных формул (6.7) и (6.8) при четном и нечетном  $n$  соответственно. Оценку сверху, совпадающую с указанной оценкой снизу, дают косинус-полиномы  $\tau_h \in \mathcal{T}_n$ , приведенные в утверждениях (d) лемм 4, 5; при этом для вычисления величины уклонения полинома  $\tau_h$  от приближаемой снизу функции  $\chi_h$  в интегральной метрике надо воспользоваться квадратурными формулами (6.7) и (6.8) при четном и нечетном  $n$  соответственно. Аналогично в случае  $h \in I_{2j} = I_{2j,n}$  оценка снизу для  $\mathcal{E}_n^-(h)$  следует из леммы 2 и квадратурных формул (6.1), (6.9); оценка сверху, совпадающая с указанной оценкой снизу, получается с помощью утверждений (d) лемм 3, 6.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко А.Г.** Об одной экстремальной задаче для полиномов с фиксированным средним значением // Приближение функций полиномами и сплайнами. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 15–22.
2. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** Полиномиальные интерполяционно-ортогональные базисы // Тр. Междунар. лет. мат. шк. С.Б. Стечкина по теории функций. Тула: Из-во ТулГУ, 2007. С. 22–39.
3. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики. 2008. Т. 14, № 3. С. 19–37.
4. **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений: Учеб. пособ.: в 2 т. 2-е изд., стереотип. М.: Физматгиз, 1962. Т. 1. 464 с. Т. 2. 639 с.
5. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. / Пер. с англ. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с. Т. 2. 538 с.
6. **Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.** Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 252 с.
7. **Крылов В.И.** Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматлит, 1959. 327 с.
8. **Марков А.А.** Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 411 с.
9. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 ч. / Пер. с нем. 3-е изд. М.: Наука, 1978. Ч. 1: Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций. 391 с. Ч. 2: Теория функций. Распределение нулей. Полиномы. Определители. Теория чисел. 432 с.
10. **Постников А.Г.** Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971. 416 с.

11. **Постников А.Г.** Избранные труды / Под ред. В.Н. Чубарикова. М.: Физматлит, 2005. 512 с.
12. **Cere Г.** Ортогональные многочлены. М. : Физматгиз, 1962. 500 с.
13. **Montgomery H.L.** Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis. CBMS Regional Conference Ser. Math. 84. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by Amer. Math. Soc. Providence, 1994. 220 p.
14. **Peherstorfer F.** Positive quadrature formulas. III. Asymptotics of weights // *Math. Comp.* 2008. Vol. 77, no. 264. P. 2241–2259.
15. **Shohat J.** On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1937. Vol. 42, no. 3. P. 461–496.
16. **Stekloff W.** Sur les problèmes de représentation des fonctions à l'aide de polynômes, du calcul approché des intégrales définies, du développement des fonctions en séries infinies suivant les polynômes et de l'interpolation, considérés au point de vue des idées de Tchébycheff // *Proc. of the International Mathematical Congress held in Toronto, August 11-16, 1924.* Vol. 1. Toronto: The University of Toronto Press, 1928. P. 631–640.
17. **Stieltjes T.J.** Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques // *Annales Sc. de l'École Norm. Super.* 1884. Vol. 1, no. 3. P. 409–426.
18. **Stieltjes T.J.** Œuvres complètes / Collected papers. Vol. 1, 2. Reprint of the 1914–1918 edition. Edited and with a preface and a biographical note by Gerrit van Dijk. With additional biographical and historical material by Walter Van Assche, Frits Beukers, Wilhelmus A. J. Luxemburg and Herman J. J. te Riele. Berlin: Springer-Verlag, 1993. Vol. 1: 566 p.; Vol. 2: 750 p.
19. **Vaaler J.D.** Some extremal functions in Fourier analysis // *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series).* 1985. Vol. 12, no. 2. P. 183–216.
20. **Winston C.** On mechanical quadratures formulae involving the classical orthogonal polynomials // *The Annals of Mathematics. Second Series.* 1934. Vol. 35, no. 3. P. 658–677.

Поступила 26.08.2011

Бабенко Александр Григорьевич  
д-р физ.-мат. наук  
ведущий науч. сотрудник  
Институт математики и механики УрО РАН  
Уральский федеральный университет  
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Kryakin, Yuriy  
dr hab.  
Mathematical Institute  
University of Wrocław  
e-mail: kryakin@math.uni.wroc.pl

Юдин Владимир Александрович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
Московский энергетический институт  
(технический университет)  
e-mail: vlayudin@mtu-net.ru