Неопределенность, U–потоки, интерполяция и аппроксимация

Ю.В. Крякин

0. Введение

Данная работа, можно сказать опус номер 7, является продолжение серии заметок, посвященных дням рождения людей, в той или иной степени, связанных с задачами теории аппроксимации. Первым, из этой серии, был препринт на 100–летие С.М.Никольского, и дальнейшие работы-вариации на тему аппроксимции, в большой степени, связаны с этой первой, несовершенной во многих отношениях статьей. Мы придерживаемся вольного стиля, надеемся простительного в выбранном формате работ для конкретных людей, без претензий на значимость и аккуратность. Опубликованные в журналах, на близкие темы, работы, к которым автор имел некоторое отношение, как соавтор, написаны в другом стиле, что представляется естественным и отражает иные точки зрения и способ мышления других людей, сотрудничество с которыми было, в большой степени, приятным и, надеюсь, интересным для широкой математической общественности.

Препринт номер 1 [1] (Никольскому) получил продолжение в препринтах 2005 [2] и 2006 [3] (стал статьей в СА (2009)) с одной стороны и в статьях [4, 5, 6, 7] – с другой. Препринт номер 2 [8] (Сендову, 2006) не встретил понимания со стороны 75–летнего юбиляра, возможно из–за изменения точки зрения на задачу, которую Б.Сендов рекламировал в 80–ых года, прошедшего века. Этот узел связи между разностными неравенствами для периодических и непериодических функций не развязан, и даже не разрублен. Проблема константы в неравенстве Уитни [8], представляется нам достаточно важной, важным представляется и форма вопроса, изменение формы вопроса.

Следующие препринты для АрХива написаны совсем недавно, в соавторстве с Александром Григорьевичем Бабенко. К семидесятилетию Виталия Афанасьевича Андриенко [9] (препринт номер 3), моего оппонента (1985) и соседа по одесскому дому, к 18–летию моего научного руководителя Элеоноры Алекандровны Стороженко [10] (препринт номер 4) и к 61–летию Виктора Ивановича Коляды [11] (препринт номер 5). Вообще то, изначально хотелось написать нечто существенное к 60–летию замечательного математика В.И. Коляды, но, возможно, именно поэтому и неуспелось. Потому как существенное наблюдение о равенстве констант Фавара и Стечкина было сделано летом 2008 года, кроме того, Виктор Иванович, с присущей ему иронией, грустной иронией, заметил, что правильно, поэтому писать к 61–летию, что и было реализовано.

Препринт номер 6 [12] (2009), героический, посвящен фронтовику Юрию Михайловичу Шмандину, мужу Элеоноры Александровны, к 85–летию. Это миниатюра про линейную алгебру и приближения, с понятным названием "Линейная алгебра + Теория приближений = ". Он еще не переведен на английский и не выложен в АрХив.

Ну и Шанель номер 7, это данный философический опус, ну .. не к 9-ому, а 7–ому мая, девятого года, к 60-летию профессора В.Г.Кротова, товарища В.И. Коляды.

Как и положено опусу он состоит из частей. Первая часть это цитаты. Выдержки из работ людей, понимающих то, о чем они пишут, значительно лучше автора. Поэтому я не счел нужным добавлять отсебятину (ну почти, кое-где добавил, и, боюсь, испортил).

Вторая часть, в некоторой степени, оригинальна. В небольшой степени, и в самом конце, однако порядок мысли так сказать, ее строй, возможно и покажется, любопытным, по крайней мере мне хочется надеется на это. Предпринята попытка посмотреть на теорию аппроксимации с точки зрения алгебры (координатизация и квантовая механика), дифференциальной динамики (У–потоки) и математической физики (метод последовательных приближений). Насколько она оказалось удачной будет ясно по прошествии некоторого времени.

Черновые варианты (еще черней) данного текста были доступны А.Г.Бабенко и А.А.Солянику. Благодарю их за внимание и замечания по тексту.

Список литературы

[1] Yu. Kryakin *Constants in the Jackson's Theorem* UWr, Report no 141 (2005) 1–14 (http://www.math.uni.wroc.pl/mathbank/preprinty/)

[2] Yu. Kryakin *Bohr–Favard inequality for differences and constants in Jackson–Stechkin theorem* ArXiv:math/0512048v1 [math. CA] (2005) 1–6

[3] Foucart S., Kryakin Yu., Shadrin A. *On the exact constant in Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric* ArXiv:math CA/0612283 (2006) 1–20 (Constructive Approximation, N2 (2009) 157-179)

[4] А.Г. Бабенко, Ю.В. Крякин *О приближении ступенчатых функций тригонометрическими полиномами в интегральной метрике* Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика т.12 N1 (2006) 27–56 (http://kryakin.com/files/kryakin/tula.pdf)

[5] А.Г. Бабенко, Ю.В. Крякин *Полиномиальные интерполяционно–ортогональные базисы* Труды Международной летней математической Школы С.Б. Стечкина по теории функций. Россия. Алексин 1–9 августа. (2007) 22–39 (http://kryakin.com/files/kryakin/proc07.pdf)

[6] А.Г. Бабенко, Ю.В. Крякин *Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами на периоде* Труды Института Математики и Механики, т.14 N3 (2008) 19–37 (English version: http://kryakin.com/files/kryakin/steklov08en.pdf)

[7] А.Г. Бабенко, Ю.В. Крякин *Интегральное приближение характеристической функции интервала и неравенство Джексона в* $C(T)$ Труды Института Математики и Механики, т.15 N1 (2009) 59–65

[8] Yu. Kryakin *Whitney Theorem for oscillatino on R function* ArXiv:math/0612442v1 [math. CA] (2006) 1–6

[9] Babenko A.G., Kryakin Yu.V. *Functions measuring smoothness and the constants in Jackson–Stechkin theorem* ArXiv:0809.0107v1 [math. CA] (2008) 1–6

[10] Babenko A.G., Kryakin Yu.V. *L–approximation of B–splines by trigonometric polynomials* ArXiv:0811.0686v1 [math. CA] (2008) 1–6

[11] Babenko A.G., Kryakin Yu.V. *On* $T_n^{\perp}$ *spaces* ArXiv:0812.2744v1 [math. CA] (2008) 1–13

[12] Ю.В. Крякин *Линейная алгебра + теория приближений =* (2009) 1–8 (http://kryakin.com/files/kryakin/toYMSfromYVK.pdf)

Часть 1. Классическая

1. Координатизация [1]

Термин *координатизация* восходит к Г.Вейлю.

"Человек может ориентироваться во внешнем мире, опираясь исключительно на свои органы чувств, на зрение, осязание, на опыт манипулирования предметами внешнего мира и на возникающую отсюда интуицию. Однако возможен и другой подход: путем измерения субъективные ощущения превращаются в объективные знаки — числа, которые способны сохраняться неограниченно долго, передаваться другим лицам, не воспринимавшим тех же ощущений, а главное — с которыми можно оперировать и таким образом получать новую информацию о предметах, бывших объектом измерения.

Эти две тенденции и отражаются: одна — в геометрии, другая — в алгебре. При этом алгебра играет приблизительно ту же роль, что и язык или письменность в контакте человека с внешним миром. Обе тенденции тесно связаны – алгебро - геометрический дуализм занимает существенное место в этой книге. Обе обладают сильной эстетической компонентой. *При сопоставлении с искусством геометрию можно сравнить с живописью, алгебру — с музыкой*".

Тезис Шафаревича. *Любые объекты, являющиеся предметом математического исследовани, – кривые и поверхнисти, отображения, симметрии, кристаллы, квантово–механические величины и т.д. – могут быть координатизированы или измерены.*

Однако для такой координатизации обычных чисел не достаточно. Наоборот, сталкиваясь с новым типом объектов, мы вынуждены конструировать (или открывать) и новые типы координатизирующих их «величин». Построение и исследование возникающих таким образом «величин» — этим и характеризуется (конечно, очень приближенно) место алгебры в математике.

Словарь квантовой механики

Физическое понятие	**Математическое понятие**
Состояние физической системы	Прямая ϕ в бесконечномерном комплексном гильбертовом пространстве
Скалярная физическая величина	Самосопряженный оператор
Величина, имеющая точное значение A в состоянии ϕ	Оператор для которого ϕ собственный вектор с собственным значением A
Множество значений величины, которое можно получить путем измерения	Спектр оператора
Вероятность перехода из состояния ϕ в состояние ψ	(ϕ, ψ), где $\lvert\phi\rvert = \lvert\psi\rvert = 1$

2. Отступление 1. Гармонический анализ. [2]

В квантовой механике подлежащие измерению характеристики изучаемых объектов называют «наблюдаемыми». Наблюдаемые можно измерять, но результат измерения не предопределен заранее; предопределено лишь некоторое вероятностное распределение результата измерения, зависящее от состояния объекта.

Сказанное становится более отчетливым в рамках следующей математической модели: *наблюдаемые* отождествляются с самосопряженными операторами (вообще говоря, неограниченными), действующими в гильбертовом пространстве H («пространстве состояний»); состоянием называют линейный положительный функционал M, заданный на множестве всех самосопряженных операторов, действующих в H и такой, что $A(I) = 1$. Число $M(A)$, где M–состояние, а A наблюдаемая, интерпретируется как математическое ожидание результата измерения наблюдаемой в состоянии F. Важную роль играют так называемые "чистые состояния": $F_\phi(A) = (A\phi, \phi)$, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в H, а $\phi \in H$ – орт; прочие состояния некоторым образом выражаются через чистые.

Пусть изучаемый объект есть частица с одной степенью свободы; предположим, что эта частица находится на прямой R, а наблюдаемые суть ее координата Q и ее импульс P. Формализм классической механики в сочетании с экспериментальными фактами, относящимися к поведению элементарных частиц, подсказывает, что самосопряженные операторы Q и P, с которыми следует отождествить наши наблюдаемые, должны удовлетворять следующему *коммутационному соотношению Гейзенберга*

$$QP - PQ = i\,h\,I, \tag{1}$$

где h – постоянная Планка. Этим свойством обладают многие пары конкретных операторов в конкретных пространствах, хотя все такие «представления» соотношения (1) унитарно эквивалентны (при некотором условии неприводимости). Особое значение имеют так называемые координатное и импульсное представления.

В *координатном представлении* пространством состояний служит $L^2(R)$, а операторы Q и P определяются так:

$$Q\phi = q\,\phi, \quad P\phi = -i\,h\,\phi',$$

где q обозначает независимую переменную в R. Этими равенствами P и Q определены на плотном в $L^2(R)$ множестве $S(R)$; их можно единственным образом расширить до самосопряженных операторов.

В *импульсном представлении* пространством состояний по-прежнему служит $L^2(R)$ (хотя, «координатную» и «импульсную» прямые следует различать: независимую переменную на импульсной прямой принято обозначать буквой p, а на координатной -— буквой q; операторы Q и P определяются теперь следующим образом

$$Q\phi = i\,h\,\phi', \quad P\phi = p\,\phi, \quad \phi \in S(R).$$

Простой подсчет показывает, что в обоих представлениях выполняется (1).

Среднее значение координаты в чистом состоянии F_ϕ, где $\phi \in L^2(R)$, $\int\ |\phi|^2 = 1$ в координатном представлении имеет вид:

$$F_\phi(Q) = \int q\,|\phi(q)|^2\,dq.$$

Аналогичная формула верна для *всех* наблюдаемых, «зависящих от координаты», т. е. для всех операторов вида $f(Q)$, где f – вещественная функция с конечным интегралом

$$\int |f|\,|\phi|^2: \quad F_\phi(f(Q)) = \int f(q)\,|\phi(q)|^2\,dq.$$

В частности, если $f = \chi_{(-\infty,\lambda]}$, то

$$F_\phi(f(Q)) = \int_{-\infty}^{\lambda} |\phi(q)|^2\,dq. \tag{2}$$

Но «результат измерения» наблюдаемой $\chi_{(-\infty,\lambda]}(Q)$ – это просто ответ на вопрос: «находится ли частица на луче $(-\infty, \lambda]$?»

Среднее значение $F_\phi(\chi_{(-\infty,\lambda]}Q)$ есть, таким образом, вероятность обнаружить частицу, находящуюся в состоянии ϕ, на луче $(-\infty, \lambda]$. Равенство (2) подсказывает следующую физическую интерпретацию функции $|\phi|^2$, отвечающей «чистому состоянию».

$$F_\phi: \int_E |\phi(q)|^2\,dq$$

есть вероятность нахождения частицы в множестве E. Чем более «δ–образна» функция $|\phi|^2$, тем меньше «неопределенность» координаты частицы, находящейся в. состоянии

F_ϕ; напротив, «расплывание» носителя меры $|\phi|^2\,dq$ означает почти полную неопределенность положения частицы (в состоянии F_ϕ).

Точно так же можно истолковать, функцию $|\phi|^2$ и при импульсном представлении:

$$\int_E |\phi(p)|^2\,dp$$

есть вероятность того, что значение импульса частицы, находящейся в состоянии F_ϕ принадлежит числовому множеству E; на этот раз степень «размытости» носителя меры $|\phi|^2$ характеризует «неопределенность импульса» частицы (в состоянии F_ϕ).

Для нас наиболее интересно то, что унитарная эквивалентность координатного и импульсного представлений соотношения (24) осуществляется с помощью *преобразования Фурье*; А именно, пусть W – оператор, заданный на функциях $\phi \in S(R)$, равенством:

$$(W\phi)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_R \exp\left(-\frac{i}{h}pq\right)\,\phi(q)\,dq$$

По теореме Планшереля он продолжим до унитарного оператора (точнее, до изометрического отображения пространства $L^2(dq)$ на пространство $L^2(dp)$. Оператор преобразует чистые «координатные» состояния в чистые «импульсные» состояния, меняя ролями операторы дифференцирования и умножения на независимую переменную.

Мы уже замечали, что оператор W подчиняется следующей закономерности: чем более «сосредоточена» (скажем, вблизи нуля) мера $|\phi(q)|^2\,dq$, тем более «расплывается» мера $|(W\phi)(p)|^2\,dp$ (и наоборот). Эта закономерность допускает точное количественное выражение (и притом многими способами).

Она доставляет математическое объяснение следующего экспериментального факта: *чем точнее удается измерить координату частицы, находящейся в данном состояния, тем больше «разброс» результатов измерения ее импульса – и наоборот. Это утверждение составляет фундаментальный квантовомеханический принцип неопределенности Гейзенберга.*

Обозначим через $\Delta_M(A)$ дисперсию наблюдаемой A в состоянии

$$M:\ \Delta_M(A) := \left[M(A - M(A))^2\right]^{1/2} = (M(A^2) - (M(A))^2)^{1/2}$$

Из соотношения (1) нетрудно непосредственно усмотреть, что для любого состояния M имеет место *соотношение неопределенности Гейзенберга*:

$$\Delta_M(Q)\cdot\Delta_M(P) \geq h/2.$$

Взяв в качестве M чистое состояние F_ϕ в координатном представлении, мы получим некоторое неравенство, связывающее ϕ с его преобразованием Фурье W_ϕ – одно из многочисленных конкретных проявлений того свойства, о котором скажем следующее

Общие формулы для обобщенных функций. Если $\alpha \in S$, то

$$(\widehat{1}, \alpha) = (1, \widehat{\alpha}) = \int \widehat{\alpha}(t)\,dt = \alpha(0)$$

и

$$(\widehat{\delta}, \alpha) = (\delta, \widehat{\alpha}) = \int \alpha(x)\,dx.$$

или

$$\widehat{1} = \delta, \quad \widehat{\delta} = 1.$$

Подобным образом получается, что

$$\widehat{e} = \delta_h, \quad \widehat{\delta_h} = e.$$

Носители "функций" δ_h и e показывают свою определенную неопределенность. Отметим, что линейная замена $f(\cdot\, s)$, сжатие в s раз приводит к растяжению образа Фурье $\frac{1}{s}\widehat{f}(\cdot/s)$ В этом смысле δ_h, дельта функция со смещением в точку h получается как

$$\delta_h = \frac{1}{h}\delta_1(\cdot/h), \quad \delta = \delta_0 = \frac{1}{0}\delta_1(\cdot/0).$$

3. Концептуальная структура квантовой механики [3]

Естественные науки имеют конструктивный характер. Их рабочие понятия не являются свойствами или атрибутами, которые можно получить из объективного мира непосредственным созерцанием. Их можно вывести только косвенными методами, путем наблюдения взаимодействия данного тела с другими телами, т. е. они определяются неявно благодаря определенным законам природы, управляющим взаимодействиями . Рассмотрим, например, формулировку галилеева понятия массы, которая по существу равнозначна следующему косвенному определению: «Каждое тело обладает импульсом, т. е. вектором $m\mathfrak{v}$, имеющим то же направление, что и его скорость; скалярный множитель m называется его массой. Импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. сумма импульсов набора взаимодействующих тел остается одной и той же перед взаимодействием и после него». Применяя этот закон к наблюдаемым процессам столкновений, мы получаем данные, позволяющие определить относительные массы различных тел. Ученые долго придерживались мнения, что такие конструктивные понятия тем не менее являются внутренне присущими свойствами «вещи в себе» (нашего объекта), даже когда не проводятся эксперименты, необходимые для их определения. В квантовой теории мы сталкиваемся с фундаментальными ограничениями этой метафизической точки зрения. Мы уже видели ранее, что координата x и связанный с ней импульс p находятся в особом отношении друг к другу: точное определение одной из этих величин мешает точному определению другой. В состоянии, описываемом волновой функцией $\psi(x)$

$$\int_R \psi(x)\overline{\psi}(x)\,dx = 1,$$

средние значения $x_0 =< x >$ и $p_0 =< p >$ определяются выражениями

$$\int_R x\,\overline{\psi}(x)\,\psi(x)\,dx, \qquad \frac{h}{i}\int_R \overline{\psi}\;\frac{d\psi}{dx}\,dx$$

Без потери общности можно принять эти средние значения равными нулю; первое среднее может быть обращено в нуль заменой x на $x - x_0$ или $\psi(x)$ на $\psi(x + x_0)$, а второе – заменой $\psi(x)$ на $e(-p_0x/h)\,\psi(x)$. Средние значения $(\Delta x)^2$, $(\Delta p)^2$ величин $(x - x_0)^2$, $(p - p_0)^2$ даются тогда выражениями

$$(\Delta x)^2 = \int_R x^2\overline{\psi}(x)\;\psi(x)\,dx,$$

$$(\Delta p)^2 = -h^2\int_R \overline{\psi}(x)\;\frac{d^2\psi}{d^2x}\,dx = h^2\int_R \frac{d\overline{\psi}}{dx}\;\frac{d\psi}{dx}\;dx.$$

Из этих соотношений легко можно получить общее неравенство

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2}. \tag{3}$$

(я благодарен **В. Паули** *за это замечание); чем меньше неопределенность в x, тем больше неопределенность в p, и обратно.*

Дополнение. [3]

Для доказательства неравенства (3), мы должны показать, что любая непрерывная и дифференцируемая функция ψ определенная для всех значений вещественной переменной x, удовлетворяет условию

$$\frac{1}{4}\left(\int_R \overline{\psi}\,\psi\,dx\right)^2 \leq \int_R x^2\overline{\psi}\,\psi\,dx \int_R \frac{d\overline{\psi}}{dx}\;\frac{d\psi}{dx}\;dx, \tag{4}$$

если, конечно, входящие в условие интегралы действительно существуют. Неравенство Шварца

$$|a_1b_1 + \dots a_nb_n|^2 \leq (a_1\overline{a}_1 + \dots + a_n\overline{a}_n)(b_1\overline{b}_1 + \dots + b_n\overline{b}_n)$$

после замены каждой из сумм одним или даже двумя интегралами принимает вид

$$\left|\int f_1g_1 + \int f_2g_2\right|^2 \leq \left(\int f_1\overline{f}_1 + \int g_1\overline{g}_1\right)\left(\int f_2\overline{f}_2 + \int g_2\overline{g}_2\right)$$

Применяя это неравенство к тождеству

$$xD(\overline{\psi}\,\psi) = x\psi D\overline{\psi} + x\overline{\psi}D\psi$$

полагая

$$f_1 = x\psi, \quad f_2 = x\overline{\psi}, \quad g_1 = D\overline{\psi}, \quad g_2 = D\psi,$$

и преобразуя интеграл

$$\int xD(\psi\overline{\psi})$$

в

$$-\int \psi\overline{\psi}.$$

интегрированием по частям, мы получаем требуемое соотношение (4), при условии, что интегрируемый член $x\psi\overline{\psi}$ стремится к 0 при $x \to \pm\infty$. То, что это действительно имеет место в случае, когда два интеграла в правой части (4) сходятся, можно увидеть из следующего *косвенного* доказательства... . □

Отступление 2. Шредингер. [3]

Волновое уравнение для состояния с данной энергией E имеет вид

$$\frac{h^2}{2m}D^2\psi + [E - V(x)]\psi = 0 \tag{5}$$

Пренебрегая на время возмущающим полем V, мы получаем в качестве решений уравнения (5) обычные волны де Бройля: функция является линейной комбинацией волн $e^{i\alpha x}$ и $e^{-i\alpha x}$, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси x, причем их волновое число α определяется формулой $(h\alpha)^2 = 2mE$. Если ввести обозначение

$$\frac{h^2}{2m}V(x) = U(x),$$

то уравнение (5) запишется в виде

$$D^2\psi + [\alpha^2 + U]\,\psi = 0. \tag{6}$$

Здесь мы принимаем, что при $x \to \pm\infty$ функция $U(x)$ принимает такие значения, что интеграл $\int_R |U|$ сходится; уравнение (6) имеет тогда решения, одно из которых при $x \to \infty$ асимптотически ведет себя как $e^{i\alpha x}$, а второе, линейно независимое от первого, в той же области ведет себя как $e^{-i\alpha x}$. Это наиболее четко можно проследить, решая уравнение (6) *методом последовательных приближений.* Пусть

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots \tag{7}$$

Возьмем в качестве нулевого приближения функцию $e^{i\alpha x}$.

Функция ψ_{n+1} определяется через ψ_n при интегрировании уравнения

$$D^2\psi_{n+1} + \alpha^2\psi_{n+1} = U\psi_n. \tag{8}$$

Отсюда

$$\psi_{n+1}(x) = -\frac{1}{\alpha}\int_x^\infty \sin\alpha(x-t)\,U(t)\psi_n(t)\,dt. \tag{9}$$

Ограничимся на время такой областью $x \geq x_0$, что

$$\frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^\infty |U| = q < 1.$$

Если неравенство $|\psi_n(x)| < a_n$ выполняется для всех x то интеграл (9) сходится и

$$|\psi_{n+1}(x)| \leq a_n\frac{1}{\alpha}\int_x^\infty |U(t)|\,dt.$$

следовательно, если принять $a_0 = 1$, $a_{n+1} = qa_n$, то $a_n = g^n$ или $|\psi_n(x)| < q^n$ для $x \geq x_0$. Вследствие этого ряд для ψ сходится по крайней мере так же быстро, как геометрическая прогрессия со знаменателем q. Его сумма удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi - \psi_0 = -\frac{1}{\alpha}\int_x^\infty \sin\alpha(x-t)\psi(t)U(t)\,dt \tag{10}$$

и поэтому является решением уравнения (6). Так как

$$|\psi(x)| \leq 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q},$$

то уравнение (10) приводит к оценке

$$|\psi(x) - \psi_0(x)| \leq \frac{1}{\alpha(1-q)}\int_x^\infty |U(t)|\,dt$$

из которой следует, что функция $\psi(x)$ при $x \to \infty$ асимптотически подобна $e^{i\alpha x}$

Список литературы

[1] И.Р. Шафаревич *Основные понятия албегры, 1985, 1987, 1999, 2005* Ижевск, (1999) 338 с. (http://kryakin.com/files/krotov/shafarevich.djvu)

[2] В.П. Хавин *Методы и структура коммутативного гармонического анализа* Итоги Науки и Техники. Современные проблемы математики. т.15 (1987) 6–133 (http://kryakin.com/files/krotov/havin.pdf)

[3] Герман Вейль *Теория групп и квантовая механика 1928, 1931, 1986* Наука, (1986) 496 с. (http://kryakin.com/files/krotov/hweil.djvu)

Chinese Heisenberg [1]

Let G be a finite abelian additive group, and let $e : G \times G \to S^1 := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ be any non-degenerate *bi-character* of G, by which we mean a function $e(x, \xi)$ taking values on the unit circle obeying the multiplicativity properties

$$e(x + x', \xi) = e(x, \xi)e(x', \xi); \quad e(x, \xi + \xi') = e(x, \xi)e(x, \xi')$$

and is non-degenerate in the sense that for every $x \neq 0$ there exists a $\xi \in G$ such that $e(x, \xi) \neq 1$, and conversely for every $\xi \neq 0$ there exists an $x \in G$ such that $e(x, \xi) \neq 1$. For instance, if G is the cyclic group $G := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, we may take $e(x, \xi) := e^{2\pi i x\xi/N}$. If $f : G \to \mathbf{C}$ is any complex-valued function on G, we may then define the Fourier transform $\hat{f} : G \to \mathbf{C}$ by the formula

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)\overline{e(x, \xi)},$$

where $|G|$ denotes the cardinality of G. If we use $\mathrm{supp}(f) := \{x \in G : f(x) \neq 0\}$ to denote the support of f, we thus see from the triangle inequality, Cauchy-Schwarz and Plancherel that

$$\begin{aligned}
\sup_{\xi \in G} |\hat{f}(\xi)| &\leq \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |f(x)| \\
&\leq \frac{|\mathrm{supp}(f)|^{1/2}}{|G|^{1/2}} (\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |f(x)|^2)^{1/2} \\
&= \frac{|\mathrm{supp}(f)|^{1/2}}{|G|^{1/2}} (\sum_{\xi \in G} |\hat{f}(\xi)|^2)^{1/2} \\
&\leq \frac{|\mathrm{supp}(f)|^{1/2} |\mathrm{supp}(\hat{f})|^{1/2}}{|G|^{1/2}} \sup_{\xi \in G} |\hat{f}(\xi)|.
\end{aligned}$$

Thus, if f is non-zero, we thus obtain the well-known *uncertainty principle*[9], [17]

$$|\mathrm{supp}(f)||\mathrm{supp}(\hat{f})| \geq |G|. \tag{1}$$

his bound is of course sharp when f is a Dirac mass, or when $\hat{f}$ is a Dirac mass. More generally, if H is any subgroup of G, and we set f to be the characteristic function χ_H of f, it is easy to see that $|\mathrm{supp}(f)| = |H|$ and $|\mathrm{supp}(\hat{f})| = |G|/|H|$, so again (1) is sharp. Indeed one can show that up to the symmetries of the Fourier transform (translation, modulation, and homogeneity) this is the only way in which (1) can be obeyed with equality (see e.g. [15]). For more background on the Fourier transform on finite abelian groups and the uncertainty principle we refer to [19].

Now consider the case where G is a cyclic group of prime order, $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, with $e(x, \xi) := e^{2\pi i x\xi/p}$. In this case G has no subgroups other than the trivial ones $\{0\}$ and G, and thus one expects to improve upon (1). Indeed we can get an absolutely sharp result as to the possible values of $\mathrm{supp}(f)$ and $\mathrm{supp}(\hat{f})$:

Theorem 0.1. *Let p be a prime number. If $f : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ is a non-zero function, then*

$$|\mathrm{supp}(f)| + |\mathrm{supp}(\hat{f})| \geq p + 1.$$

Conversely, if A and B are two non-empty subsets of $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ such that $|A| + |B| \geq p + 1$, then there exists a function f such that $\mathrm{supp}(f) = A$ and $\mathrm{supp}(\hat{f}) = B$.

The informal explanation of this principle is that the class of functions f from $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ has exactly p degrees of freedom. Requiring that $\mathrm{supp}(f) = A$ takes away $p-|A|$ of these degrees, while requiring that $\mathrm{supp}(\hat{f}) = B$ takes away another $p - |B|$. The uncertainty principle is then a statement that the Fourier basis (of exponentials) and the physical space basis (of Dirac deltas) are "totally skew" (or more precisely, that all the minors of the exponential basis matrix $(e^{2\pi ijk/p})_{0\le j,k<p}$ are non-zero). The idea that the prime cyclic group $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ has this "maximally skew" structure (in some sense, it is as far as possible from containing subgroups) is consistent with some other recent work on the arithmetic structure of prime cyclic groups, see for instance [3], [4].

Observe that an immediate consequence of Theorem 0.1 is that any sparse polynomial $\sum_{j=0}^{k} c_j z^{n_j}$ with $k+1$ non-zero coefficients and $0 \le n_0 < \ldots < n_k < p$, when restricted to the p^{th} roots of unity $\{z : z^p = 1\}$, can have at most k zeroes. Indeed, such a polynomial is essentially the Fourier transform in $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ of a function whose support has cardinality $k+1$, and so the support of the polynomial must contain at least $p-k$ p^{th} roots of unity by Theorem 0.1, and the claim follows.

Another immediate consequence is the Cauchy-Davenport inequality [6], [7], which asserts that for any two finite non-empty subsets A and B of $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, the sumset $A+B := \{a+b : a \in A, b \in B\}$ obeys the bounds

$$|A+B| \ge \min(|A|+|B|-1, p).$$

Доказательство. [1] Fix A, B. Since A and B are non-empty, we may find two subsets X and Y of $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ such that $|X| = p+1-|A|$, $|Y| = p+1-|B|$, and $|X \cap Y| = \max(|X|+|Y|-p, 1)$. By Theorem 0.1 we may find a function f such that $\mathrm{supp}(f) = A$ and $\mathrm{supp}(\hat{f}) = X$, and a function g such that $\mathrm{supp}(g) = B$ and $\mathrm{supp}(\hat{g}) = Y$. Then $f * g$ has support contained in $A+B$ and has Fourier support equal to $X \cap Y$ (in particular, $f * g$ is non-zero), and hence by Theorem 0.1 again we have $|A+B| + |X \cap Y| \ge p+1$, which gives $|A+B| \ge \max(|A|+|B|-1, p)$ as desired. □

It is interesting to compare this proof with the polynomial method proof of [2], which uses the basis of polynomials rather than the basis of exponentials but is otherwise rather similar in spirit.

Based on this result for groups of prime order, it seems natural to conjecture that one can improve (1) substantially for all finite abelian groups G, provided that the cardinality of $|\mathrm{supp}(f)|$ and $|\mathrm{supp}(\hat{f})|$ stays well away from any factor of $|G|$. For instance, Roy Meschulam (private communication) has used Theorem 0.1 and an iteration argument to show that $p^j|\mathrm{supp}(f)| + p^{n-j-1}|\mathrm{supp}(\hat{f})| \ge p^n + p^{n-1}$ for all non-zero functions f supported on $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$ and all $0 \le j \le n-1$. To put this another way, the point $(|\mathrm{supp}(f)|, |\mathrm{supp}(\hat{f})|)$ in $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ lies on or above the convex hull of the points (p^j, p^{n-j}) for $0 \le j \le n$, which correspond to the cases where f is the characteristic function of a subgroup of $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$. This has immediate application to the number of zeroes of a sparse polynomial of several variables in $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, which may be of interest for cryptographic applications.

[1] We thank Robin Chapman for this proof, which is slightly shorter than the original proof of the author.

Список литературы

[1] T.Tao *An uncertainty principle for cyclic groups of prime order* arXiv:math/0308286v6 [math.CA] 1–7

[2] N. Alon, M. Nathanson, I. Ruzsa, *The polynomial method and restricted sums of congruence classes*, J. Number Theory **56** (1996), 404–417.

[3] J. Bourgain, N. Katz, T. Tao, *A sum-product estimate in finite fields, and applications*, to appear, GAFA. `math.CO/0301343`

[4] J. Bourgain, S. Konyagin, *Estimates for the number of sums and products and for exponential sums over subgroups in fields of prime order*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **337** (2003), 75–80.

[5] E. Candes, J. Romberg, T. Tao, *Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information*, preprint.

[6] A.L. Cauchy, *Recherches sur les nombres*, J. École Polytech. **9** (1813), 99-116.

[7] H. Davenport, *On the addition of residue classes*, J. London Math. Soc. **10** (1935), 30–32.

[8] J. Dieudonné, *Une propriété des racines de l'unité*, Collection of articles dedicated to Alberto González Domínguez on his sixty-fifth birthday. Rev. Un. Mat. Argentina **25** (1970/71), 1–3.

[9] D.L. Donoho, P.B. Stark, *Uncertainty principles and signal recovery*, SIAM J. Appl. Math. **49** (1989), 906–931.

[10] R.J. Evans, I.M. Stark, *Generalized Vandermonde determinants and roots of unity of prime order*, Proc. Amer. Math. Soc. **58** (1977), 51–54.

[11] P. Frenkel, *Simple proof of Chebotarev's theorem on roots of unity*, preprint. `math.AC/0312398`

[12] D. Goldstein, R. Guralnick, I. Isaacs, Inequalities for finite group permutation modules, preprint. `math.GR/0310169`

[13] R. Meshulam, *An uncertainty inequality for finite abelian groups*, preprint. `math.CO/0312407`

[14] M. Newman, *On a theorem of Cebotarev*, Linear and Multilinear Algebra **3** (1975/76), no. 4, 259–262.

[15] T. Przebinda, *Three uncertainty principles for a locally compact abelian group*, preprint.

[16] Yu. G. Rešetnyak, Yu., *New proof of a theorem of N. G. Cebotarev* (Russian), Uspehi Mat. Nauk (N.S.) **10** (1955), no. 3(65), 155–157.

[17] K.T. Smith, *The uncertainty principle on groups*, SIAM J. APpl. Math. **50** (1990), 876–882.

[18] P. Stevenhagen, H.W. Lenstra Jr., *Chebotarëv and his density theorem*, Math. Intelligencer **18** (1996), no. 2, 26–37.

[19] A. Terras, *Fourier analysis on finite groups and applications.* London Mathematical Society Student Texts, 43. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

Anosow Flow. Introduction [1]

A simple situation illustrates some crucial aspects of hyperbolic behavior that are common to all different versions of hyperbolicity. Let A be a linear map of the plane given by the matrix $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, where $0 < \lambda < 1 < \mu$. T he horizontal axis is the stable (i.e., contracting) direction, and it is characterized by the property that $A^n v \to 0$ as $n \to \infty$ for every v on this axis. Every other vector w satisfies $A^n w \to \infty$ as $n \to \infty$, so the vertical axis cannot be characterized by this property. To single out the vertical direction reverse time to obtain $A^{-n} w \to 0$ as $n \to \infty$ for every vertical vector w (and only for these). Passing to the map A^{-1} instead interchanges the roles of the expanding and contracting subspaces.

The same analysis applies to any linear map without eigenvalues on the unit circle. Moreover, for any linear map A consider the sum of the generalized eigenspaces for all eigenvalues with absolute value at most λ for some $\lambda \in (0, 1)$. This subspace is characterized by $\|A^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|$ for some $C > 0$. By passing to A^{-1} one can similarly describe the subspaces corresponding to expansion by a factor $\mu > 1$. A similar analysis can be carried out for the substantially more difficult case of sequences of linear maps, which arises from the study of the action of the differential of a map along an orbit.

Indeed, this analysis of the linear situation can be transferred to study local behavior of nonlinear systems where the stable and unstable subspaces are replaced by local stable and unstable manifolds. The local stable manifold is characterized by exponential contraction in forward time, and similarly, by reversing time, the local unstable manifold is characterized by exponential contraction in backward time. Unlike in the linear case, unstable manifolds may not expand in forward time. In uniformly hyperbolic dynamical systems this is usually not the case (the unstable manifold expands exponentially when moved forward), but it is a serious obstacle in nonuniformly hyperbolic dynamics.

The strongest possible version of hyperbolicity is that the asymptotic contraction and expansion rates are uniform (uniform hyperbolicity), i.e., they are bounded away from 1 independently of the point, as is made explicit in (1) below. This is the case for *Anosov diffeomorphisms.* There were two important motivations for the introduction and study of this notion. One of these was the focus of the *Smale school* on understanding diffeomorphisms up to topological conjugacy, and particularly on structural stability, which was in subsequent decades, found to be essentially equivalent to *uniform hyperbolicity.* The other was the *Boltzmann ergodic hypothesis*, which prompted the search for ergodic mechanical systems, for which geodesic flows of negatively curved Riemannian manifolds were the outstanding candidates, and for which these remain the primary example.

The quintessential example of a uniformly hyperbolic dynamical system is the linear map of the plane given by the integer matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. This is well-defined modulo 1 (if $\vec{x} = \vec{y} \pmod 1$ then $\vec{x} = \vec{y} + \vec{n}$ for an integer vector $\vec{n}$, so $A\vec{x} = A\vec{y} + A\vec{n}$, where $A\vec{n}$ is an integer vector; thus $\vec{A}x = \vec{A}y \pmod 1$) and hence gives a well-defined map on the 2-torus $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Moreover, this map is invertible because $\det A = 1$, so that A^{-1} also has integer entries. A has eigenvalues $0 < \lambda^{-1} < 1 < \lambda$, and the corresponding eigenspaces provide the expanding and contracting directions at every point of $\mathbb{T}^2$. Having irrational slope, these spaces project to dense curves on $\mathbb{T}^2$. It is also easy to check that the set $\mathbb{Q}^2/\mathbb{Z}^2$ of rational points is precisely the set of periodic points.

This example generalizes easily to the action on the n-torus $\mathbb{T}^n$ of any $n \times n - matrix$ that has integer entries and unit determinant and no eigenvalue on the unit circle. These are referred to as toral automorphisms because they are algebraic automorphisms of the additive group $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. A further generalization is obtained when one thinks of the torus $\mathbb{T}^n$ as an abelian additive group and moves to nilpotent groups. *Smale constructed examples of transformations on the Heisenberg group that project to a compact factor with the same feature of expanding and contracting directions.*

The defining feature of uniform hyperbolicity exhibited in these examples is that the tangent space at every point splits into contracting (or stable) and expanding (or unstable) subspaces:

Definition. *Suppose M is a manifold, $f\colon M \to M$ is a diffeomorphism. We say that f is uniformly hyperbolic or an Anosov diffeomorphism if for every $x \in M$ there is a splitting of the tangent space $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$ and there are constants $C > 0$ and $\lambda \in (0,1)$ such that for every $n \in \mathbb{N}$ one has*

$$\|Df^n(v)\| \le C\lambda^n\|v\| \quad for \quad v \in E^s(x) \quad and \quad \|Df^{-n}(v)\| \le C\lambda^n\|v\| \quad for \quad v \in E^u(x).$$

The subspaces $E^s(x)$ and $E^u(x)$ are called the stable and unstable subspaces at x.

It is an easy consequence of this definition that the stable and unstable subspaces depend continuously on the point and are invariant. Note also that $E^s(x)$ and $E^u(x)$ are interchanged when one passes from a map to its inverse.

The existence of these two directions at every point imposes a topological restriction, and therefore not every manifold admits an Anosov diffeomorphism or flow. For instance, the "hairy ball theorem" shows that there is no *Anosov diffeomorphism*on the 2-sphere. It is unknown whether the universal cover of a manifold that admits an Anosov diffeomorphism must be $\mathbb{R}^n$ for some n.

Список литературы

[1] Boris Hasselblatt and Yakov Pesin *Hyperbolic dynamics* (2008), Scholarpedia, 3(6):2208 (http://www.scholarpedia.org/article/Smooth_dynamics)

Часть 2. Оригинальная

A. Неопределенность в аппросимациях

Это некое вольное изложение, нетехническое. Более фантазии, нежели тех-нически подкрепленные аргументы в пользу того, что возможно удасться посмотреть на конретные теоремы с более широкой точки зрения, более общей.

В совершенно непритязательной на существование аналогии, неопределенность Гейзенберга это, грубо говоря, две формулы. Формула производной произведения

$$D(fg) = fDg + gDf$$

при выборе $g = x$ принимающая вид

$$D(xf) - xDf = f,$$

и интерпретации умножения на x как оператора, а также неравенство Коши, т.е., по существу, определение угла в многомерном пространстве. Можно сказать, что это теорема о производной, с точки зрения координат, ведь умножение на x это та же производная в другом пространстве. Примитивно: если

$$e_n(t) := \exp(int), \quad \text{или с точки зрения координат} \quad \widehat{e} = (\dots, 0, 1, 0, \dots)$$

то

$$De_n = i\,n\,e_n$$

т.е. на базовых функциях дифференцирование и есть умножение.

Неопределенность можно трактовать, в вольном смысле и следующим, важном для нас образом. А именно с точки зрения носителей функции и носителей ее Фурье-образа: если носитель функции в одном пространстве мал, то в пространстве координат (преобразований Фурье), он велик, и имеет место некое сохранение площади, опять же все сказанное имеет очень неопределенный смысл, ну ведь принцип то неопределенности.

Функция $e_n(t)$ на периоде размазана, регулярно размазана, и сосредоточена в одной точке в пространстве координат, которой можно мыслить как пространство ступенчатых функций на оси, тогда это просто ступенька, с носителем, ну пусть $[n, n+1]$.

А дельта–функции на периоде соответсвует характеристическая функция оси R. Это крайний случай, но может служить неким указателем направления мысли. Еще одной интерпретацией геометрической, естественной, координатной являются векторы в бесконечномерном пространстве. Характеристическая функция оси это поворот и растяжение, ну как бы в R^2 мы бы сделали из вектора $(1,0)$ вектор $(1,1)$ повернув на $\pi/4$ и растянув.

A.1. Два неравенства

Теория аппроксимации, по-существу, это две оценки для функций на пространстве тригонометрических полиномов T_n и на его дополнении (с точки зрения образов Фурье) $T_n^\perp$. Мы разбиваем ось R на два куска, вырезая симметричную окрестность нуля, в этом смысле рассматриваем $(\dots,0,\alpha_{-n+1},\dots\alpha_{n-1},0,\dots)$ как пространство тригонометрических полиномов и $(\dots,\alpha_{-n},0,\dots,0,\alpha_n,\dots)$ как пространство антиполиномов.

По-существу осуществляем локализацию образов Фурье. Может быть еще раз нужно сказать, повторить, *первый этап, а именно сама постановка задачи об аппроксимации* начинается с локализации, т.е. вступает в игру принцип неопределенности. Мы локализуем Фурье-образы, в окрестности нуля. Но берем не одну гармонику (что тоже любопытно и приводит к средним значения функций равным нулю в случае пространства $T_1^\perp$). Случай нулевой гармоники это случай приближения константой, ну, или изучение функций со средними значениями равными нулю. Среднее значение равное нулю это и есть размазанность, или выражение неопределенности, для локализованного Фурье-образа, симметрично локализованного. Мы ограничимся симметричной ситуацией, т.е. будем расширять пространства T_n по n оставив, пока сдвиги, не будем уходить от симметрии.

Приведем два, хорошо известных, факта, которые и есть теория аппроксимации в целом.

Неравенство Бернштейна.

$$\|Dt_n\| \le n\|t_n\|, \quad t_n \in T_{n+1}. \tag{A.1}$$

Нормы можно трактовать в широком смысле, и как квазинормы $\|\cdot\|_p, \quad p \ge 0$. Другими словами, поведение e_n, крайней точки вырезанного отрезка является экстремальной, действие оператора дифференцирования на целом куске похоже на действие на одной гармонике и устанавливает степень локализации тригонометрических полиномов, они *относительно плохо локализованы*, это естественно, и показывает их различие с дельта–функций, для представлении которой нужна вся ось Фурье образов $\widehat{\delta} = (\dots 1,1,1,\dots)$.

Неравенство Бора.

$$\|Dg_n\| \ge \frac{2}{\pi}\, n\, \|g_n\|, \quad g_n \in T_n^\perp. \tag{A.2}$$

Неравенство Бора имеет большее значение для аппроксимации. Отметим существенные отличия от неравенства Бернштейна. Во-первых, неравенство Бора рассматривается для обычных норм $\|\cdot\|_p,\ p \ge 1$, и точно для крайних точек $p = 1,\infty$. Во-вторых, оно меняется при итерациях оператора дифференцирования и превращается в неравенства Фавара. Это, в некоторой степени связано с тем, что функции из пространства антиполиномов $T_n^{\perp}$ не обязательно гладки и, мне, например, неизвестны точные неравенства Бора–Фавара для промежуточных значений p, кроме, очевидного случая $p = 2$. Говоря большое значение, я имею ввиду просто, что это неравенство записанное в другом порядке и есть, по-существу, источник теорем аппроксимации. В частности, из него нетрудно получить точную оценку Корнейчука (1962).

Приведем еще одно очевидное замечание, подчеркивающее некую неопределенность. Напишем чему же соответсвует

$$\widehat{g}_n = (\dots 1, 1, \dots, 0, 0, 0, \dots, 1, 1, \dots)$$

вырезанная в окрестности нуля, нулем, дельта функция, в образах Фурье. Это очень просто. Симметричное вырезание гармоник соответсвует вычитанию из дельта функции ядер Дирихле, локализация которых оставляет желать лучшего, в частности, проблемы сходимости рядов Фурье, могут быть интерпретированы, как слишком грубое обрезание, или вырезание характеристической функцией части набора

$$(\dots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1 \dots).$$

Сглаживание мультипликатора дает лучшие, почти оптимальные результаты, средние Фейера (треугольники) дают ядра Фейера, положительные, и теорему Вейерштрасса, средние Валле-Пуссена (трапеции) дают почти наилучшие приближения, теорему Джексона–Стечкина [9].

Бросается в глаза, что по форме, неравенства Бернштейна и Бора напоминают определение U–потока (потока Аносова).

Однако, неравенство Бернштейна и Бора находятся в более деликатной связи, на которой мы, в данный момент не будем обращать особого внимания. Подчеркнем грубую аналогию, нарисуем картинку, упрощая ситуацию, широкими мазками. *Грубо все выглядит так, будто бы разбиение "многообразий" $L, L^2, C, C^k, C^\infty, A$ на две перпендикулярные составляющие $L = T_n \bigoplus T_n^{\perp}$ позволяет контролировать действия оператора дифференцирования на каждой из частей. Контроль на второй части (Бор–Фавар) дает прямые оценки теории приближений, контроль на первой части (Бернштейн) дает обратные оценки.*

A.2. Интерполяция и аппроксимация

Отметим еще один процесс, разбиения, применяемый для характеризации линейных подпространств между банаховыми пространсвами $X_1 \subseteq X_0$ снабженных "нормами" $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$. Рассмотрим величину

$$K(f,t) := \inf_{g \in X_1} \left(\|f - g\|_0 + t\|g\|_1 \right)$$

в случае пространств $X_0 = C(T)$ и $X_1 = Lip\,1\,(T)$, нормы $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_\infty$ и полунормы

$$\|g\|_1 = \|g\|_{Lip1} := \sup_{s>0} \left(s^{-1} \sup_{|h|<s, x\in T} |g(x+h/2) - g(x-h/2)| \right).$$

Величина

$$\omega(g,t) := \sup_{|h|<t, x\in T} |g(x+h/2) - g(x-h/2)|$$

называется модулем непрерывности и служит стандартной и классической мерой промежуточных гладкостей функций между C и $Lip\,1$. При очевидной интерпретации, *K–функционал Петре* измеряет скорость аппроксимации непрерывных функций функциями из класса Липшица, одновременно контролирую норму приближающих функций.

Прямые и обратные теоремы теории приближений удобно рассматривать с точки зрения функционала Петре.

Предварительно сделаем одно техническое замечание. Модуль непрерывности ω при данной функции g не является выпуклой функции аргумента t, а K–функционал является. Обозначим через ω^* выпуклую мажоранту модуля непрерывности. Нетрудно доказать, что

$$\omega(g,t) \le \omega^*(g,t) \le 2\omega(g,t).$$

Важным фактом, доказанным, по-существу, Корнейчуком [6] (1962), хотя в явном виде другое доказательство дал и Петре [4] (1969), является следующее тождество

$$2K(f,t) = \omega^*(f,2t).$$

Поэтому аппроксимационные теоремы можно доказывать имея ввиду более удобную, с точки зрения указателя что нужно делать при доказательстве, характеристику K вместо ω. Отметим, еще один, почти очевидный факт: вместо пространств $Lip\,1$ можно использовать пространство дифференцируемых функций с полунормой $\|g\|_{X_1} = \|Dg\|_\infty$. Отметим, также, что простое доказательство Семенова и Митягина равенства K–функционала и выпуклой мажоранты модуля непрерывности можно найти в у Дэ Вора Лоренца (стр. 175).

Говоря о том, что использование K–функционала облегчает понимания того факта, что неравенства предыдущего пункта А.1, неравенства Бернштейна и Бора–Фавара являются ключевыми в аппроксимации, нельзя не отметить, что по-существу, без абстрактного формализма идеи K–функционала как приближения с контролем, вероятно, впервые использовал В.А. Стеклов (1924) ([3], с.37). Его рассуждения очень просты, приведем их.

Для того, чтобы приблизить произвольную непрерывную функцию, приблизим ее гладкой функцией, а именно средними Стеклова, или, говоря иначе, сверткой исходной функции с характеристической, L–нормированной функцией интервала $(-h/2, h/2)$. А потом приблизим, уже гладкую свертку чем ее нужно приближать, например тригонометрическими полиномами. Имея в распоряжении точные неравенства Бора–Фавара [1, 2] (1935–36), а именно простое следствие второго неравенства пункта А.1, неравенства Бора,

$$\inf_{\tau\in T_n} \|g-\tau\| \le \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{n}\,\|Dg\|$$

будем иметь

$$f(x) = f(x) - (f*\chi_h)(x) + (f*\chi_h)(x) = W_2(f,x,h) + (f*\chi_h)(x) \qquad (Steklov)$$

и

$$E_n(f) := \inf_{\tau\in T_n} \|f-\tau\| \le W_2(f,x,h) + E_n(f*\chi_h) \le \omega(f,h/2) + \frac{\pi}{2} n^{-1} \|D(f*\chi)\| \le$$

$$\omega(f,h/2)+\frac{\pi}{2}(nh)^{-1}\|f(\cdot+h/2)-f(\cdot-h/2)\|\le\frac{3}{2}\,\omega(f,\frac{\pi}{n}),\quad h=\pi/n.$$

Таким образом имеет первое основное неравенство теории приближений, *прямое неравенство Джексона*, с "почти оптимальной" константой 3/2. Точное неравенство, с константой 1 было получено [6] Корнейчуком (1962). Его можно вывести из эквивалентности модуля непрерывности и K–функционала (см. [16], стр. 142). Иное, более короткое доказательство, основанное на двойственности, альтернансе Чебышева и неравенстве Никольского (варианте неравенства Бора в L) было предьявлено Шалаевым и В.Бабенко [8] (1991).

Покажем, далее, как работает неравенство Бернштейна в рамках K–формализации теории аппроксимации. Пусть $\tau_{2^n}\in T_{2^n}$ многочлен наилучшего приближения для f. Тогда, используя телескопическое представление Бернштейна

$$\tau_{2^n}=\sum_{j=1}^{n}\tau_{2^j}-\tau_{2^{j-1}},\quad \tau_1=0,$$

получим принципиальную, *основную обратную оценку Бернштейна* теории приближений:

$$\frac{1}{2}\,\omega(f,2t)\le K(f,t)\le\|f-\tau_{2^n}\|+t\|D\tau_{2^n}\|\le$$

$$E_{2^n}(f)+t\|\sum_{j=1}^{n}2^j(\tau_{2^j}-\tau_{2^{j-1}})\|\le E_{2^n}(f)+2t\sum_{j=0}^{n}2^jE_{2^j}(f).$$

Прямая и обратная теорема теории приближений, дают характеристику классов $Lip\,\alpha$, $0<\alpha<1$:

$$\omega(f,t)\le C_1t^{\alpha}\quad\Longleftrightarrow\quad E_n(f)\le C_2n^{-\alpha},$$

однако для характеристики класса $Lip\,1$ в степенной шкале гладкостей, требуется привлечь производные и разности порядка выше первого. Стандартные обобщения не привлекают новых идей, обычно используют итерированное неравенство Бернштейна и неравенство Бора–Фавара. Отметим, что в отличие от неравенства Бернштейна, которое сохраняет свою форму, с теми же экстремалями, $e_n(t)$, неравенство Фавара, экстремально на других функциях, сплайнах *Эйлера,* получающихся при интегрировании sign $\cos(nt)$.

В следующем параграфе мы немного изменим подход Стеклова, модифицируем его, привлекая внимание к характеристике W_2. И изменим направление движения. Попытаемся снова вернуться к истокам, к доказательству Стеклова и его представлению, с надеждой, что предложенный нами подход, будет, расширен на абстрактные ситуации и приведет к чему-то близкому к K–функционалу, к некому иной, новой, точки зрения на разложение пространства $T_n^{\perp}$

Разложение $T_n^{\perp}$ (см. ниже (B.1)) получилось в результате попыток получить точные по порядку константы в прямых оценках в терминах высоких гладкостей [9]. Однако здесь мы, ограничимся простейшим случаем, случаем вторых разностей.

B.1. Функции $W_2(f,x,h)$

Напишем еще раз разложение Стеклова:

$$f(x) = f(x) - (f * \chi_h)(x) + (f * \chi_h)(x) = W_2(f,x,h) + (f * \chi_h)(x).$$

Предположим, что $f = g_n \in T_n^{\perp}$, $n \in \mathbb{N}_+$. И сделаем следующий, очень простой шаг: продолжим выписанное разложение, запишем формальный ряд [12]

$$g_n(x) = g_n(x) - (g_n * \chi_h)(x) + (g_n * \chi_h)(x) - (g_n * \chi_h^2)(x) + (g_n * \chi_h^2)(x) - (g_n * \chi_h^3)(x) + \dots =$$
$$((g_n - g_n * \chi_h) * \delta)(x) + ((g_n - g_n * \chi_h) * \chi_h)(x) + ((g_n - g_n * \chi_h) * \chi_h^2)(x) + \dots$$

Или, коротко

$$g_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (W_2(f,\cdot,h) * \chi_h^j)(x) = \qquad (B.1)$$

$$(W_2(f,\cdot,h) * \sum_{j=0}^{\infty} \chi_h^j)(x). \qquad (B.2)$$

Формулы выше, это ничто иное как разностный аналогом формулы Эйлера–Маклорена:

$$g_n(x) = (D^2 g_n * B_2)(x), \quad B_2(x) = \text{ периодизированный второй многочлен Бернулли }.$$

Так же, как и формула Эйлера–Маклорена, представление $(B.1)$ дает оценку типа Бора–Фавара [12]

$$W_2(g_n,h) := \|W_2(g_n,\cdot,h)\| \ \geq (\sum_{j=0}^{\infty} E_n(\chi_h^j)_1)^{-1} \|g_n\|, \quad g_n \in T_n^{\perp}, \qquad (B.3)$$

и оценку аппроксимации

$$E_n(f) \leq \sum_{j=0}^{\infty} E_n(\chi_h^j)_1 \ W_2(f,h) = C_{h,2}\, W_2(f,h). \qquad (B.4)$$

Константа сжатия (см. неравенство Бора $(A.2)$) $C_{h,2}$ близка к точной константе сжатия Бора–Фавара при подходящем выборе h, а именно, если положить $h = \pi/(2n)$, и вычислить наилучшие интегральные приближения B–сплайнов χ_h^j [11], то мы получим точную оценку, с константой

$$C_{\pi/(2n),2} = \tan 1 + \sec 1.$$

Неравенство $(B.3)$ дает в этом случае неравенство Фавара, с незначительной мультипликативной потерей $(\tan 1 + \sec 1)/3$. Можно ли, в принципе, избавиться от таких потерь – открытый вопрос. Вероятно вопрос о выборе правильного аргумента под модулем гладкости это вопрос близости разностных оценок к дифференциальным.

Аналоги неравенства Бернштейна (неравенства растяжения) тоже имеет место для $h \leq 2\pi/n$ [10]

$$W_2(\tau_n,h) \leq W_2(e_n,h)\, \|\tau_n\|, \quad \tau_n \in T_{n+1}. \qquad (B.5)$$

$$\|D^2\tau_n\| \le n^2 W_2(e_n,h)^{-1}\, W_2(\tau_n,h), \quad \tau_n \in T_{n+1} \qquad (B.6)$$

Особенностью пары неравенств $(B.4),(B.6)$ и их распространений на операторы W_{2k} является большая гибкость при аппроксимации. В частности удается без проблем переносить оценки аппроксимации с одного метода на другой с сохранением констант [10].

Возвращаясь к представлению Стеклова, и находясь на уровне вторых разностей, отметим, что его небольшая модификация позволяет получить неравенство Джексона, неулучшаемое, еще проще, нежели это было сделано в случае первых разностей.

Тождество

$$f(x) = f(x) - (f * \chi_h^2)(x) + (f * \chi_h^2)(x) = W_2(f,x,h,2) + (f * \chi_h^2)(x)$$

и использование оценки Фавара для вторых разностей (которое носит название неравенства Фавара–Ахиезера–Крейна)

$$E_n(f) \le \frac{\pi^2}{8}\, n^{-2}\, \|D^2 f\|,$$

позволяет мгновенно получить, выбирая $h = \pi/(2n)$ точную оценку [7]

$$E_n(f) \le W_2(f,h,2) + \frac{1}{2}\sup_{x\in R} |f(x-\pi/(2n)) - 2f(x) + f(x+\pi/(2n))| \le \omega_2(f,\pi/(2n)).$$

B.2. Что дальше?

Коротко повторим то, что было написано. Неопределенность Гейзенберга, это неопределенность анализа Фурье, неопределенность разложения $X = T_n \bigoplus T_n^{\perp}$. Она связана с оператором D и сверткой естественным образом. Потоки Аносова, это разложение на сжимаемые и растягиваемые компонетны X, естественными операторами являются D и Δ, обычное и дискретное дифференцирование и их итерации. Основные теоремы аппроксимации и являются, в определенной степени, иллюстрацией этого общего принципа, хотя, вероятно именно идеи аппроксимации, точнее их трактовка В.А. Стекловым оказали существенное влияние на выработку языка для описания и теории интерполяции операторов, хотя подчеркиваются идеи Марцинкевича и Рисса–Торина. –функционал Петре, да и декларацию о приложении интерполяции к аппроксимации, вероятно, следует понимать с точностью до наоборот, а именно как эффективность применения идей конкретных оценок Берштнейна и Бора–Фавара к теории интерполяции. Кроме того, отметим, что разложение $(B.1)$ можно рассматривать как процесс последовательных приближений, как ряд Неймана, о котором как раз очень подробно сказано в книжке В.А. Стеклова, причем исторически честно подчеркивается заслуги Робена в такого рода задачах, работы которого появились ранее работ Фредгольма.

Попробуем сделать, без особых иллюстраций еще один шаг, от математической физики к абстракции. Он естественен. Если смотреть на K–функционал, как на процесс приближения и контроля, с помощью оператора D, то следующей характеристикой может быть то, что связывает три вложенных пространства. Возьмем для примера C, C^1, C^2.

Оставив в разложении Стеклова три слагаемых

$$g_0 = (g_0 - g_1) + (g_1 - g_2) + g_2$$

возможно определить характеристику

$$K_2(f,t,C,C^1,C^2) := \inf_{g_1 \in C^1,\ g_2 \in C^2} \left(\|f - g_1\|_C + t\|g_1 - g_2\|_{C^1} + t^2\|g_2\|_{C^2} \right)$$

Насколько хорошо данная характеристика описывает вторую гладкость в терминах вторых разностей? Другими словами не является ли неудачи в попытках точно охарактеризовать вторые гладкости обычным K–функционалом отвечающими существу дела, недостаточностью для этой цели обычного K–функционала и насколько неизбежны константы неопределенности, типа $(\tan 1 + \sec 1)/3$, в таких характеризациях?

Список литературы

[1] H. Bohr *Ein allgemeiner Satz uber die Integration eines trigonometrischen Polynoms* Prace Matem.-Fiz. **43** (1935) 273–288 (=Collected Mathematical Works II, C 36)

[2] J. Favard *Application de la formule summatoire d'Euler à la démostration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques ou presque–périodiques,* Mat. Tidsskr. **B** (1936) 81–94

[3] В.А. Стеклов *Основные задачи математической физики* м. Наука (1922, 1923, bf 1963) 432с.

[4] J. Peetre *Exacts interpolation theorems for Lipschitz continuous functions* Ricerche Mat. **18** (1969) 239–259

[5] Н.П. Корнейчук *О наилучшем приближении непрерывных функций* Изв.АН СССР. Сер.мат. **27** (1963) 29–44

[6] Н.П. Корнейчук *Точная константа в теореме Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций* ДАН СССР **145** (1963) 514–515

[7] В.В. Шалаев *К вопросу о приближении непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами* Исследования по современным проблемам суммирования функций и их приложеням. Днепропетровск. **6** (1977) 39–43

[8] В.Ф. Бабенко, В.В. Шалаев *Об оценках наилучшего приближения, вытекающих из критерия Чебышева* Мат.заметки **49** N4 (1991) 148–150

[9] Foucart S., Kryakin Yu., Shadrin A. *On the exact constant in Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric* // ArXiv:math CA/0612283 (2006) 1–20 (Constructive Approximation, 2009)

[10] Babenko A.G., Kryakin Yu.V. *Functions measuring smoothness and the constants in Jackson–Stechkin theorem* ArXiv:0809.0107v1 [math. CA] (2008) 1–6

[11] Babenko A.G., Kryakin Yu.V. *L–approximation of B–splines by trigonometric polynomials* ArXiv:0811.0686v1 [math. CA] (2008) 1–6

[12] Babenko A.G., Kryakin Yu.V. *On $T_n^{\perp}$ spaces* ArXiv:0812.2744v1 [math. CA] (2008) 1–13

[13] A.G. Babenko, Yu.V. Kryakin *On approximation of step functions by trigonometric polynomials in the integral metric* // Izvestia of the Tula State University. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics. Tula: TSU, 2006, Vol. 12, N 1, 27–56 (in Russian) (http://kryakin.com/files/kryakin/tula.pdf)

[14] A.G. Babenko, Yu.V. Kryakin, *Polynomial interpolation–orthogonal bases* International Summer Mathematical Stechkin Workshop on Function Theory, 2007, 22–40 (in Russian) (http://kryakin.com/files/kryakin/proc07.pdf)

[15] A.G. Babenko, Yu.V. Kryakin, *Integral approximation of characteristic function of interval by trigonometric polynomials*// Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki, 2008, Vol. 14, N 3, 19–37 (in Russian) (English version: http://kryakin.com/files/kryakin/steklov08en.pdf)

[16] R. DeVore, G.G. Loretz, *Constructive Approximation* , Springer, Berlin, 1993

Часть 3. Приложение

Замечания к работе А.Г. Бабенко и Ю.В. Крякина "On $T_n^\perp$ spaces".

А.А. Соляник

Поскольку читающим и так известно обо всем, что непосредственно связано с эти предметом начнем без предисловия. Скажем только, что целью данной заметки является желание понять внутреннюю структуру механизмов лежащих в доказательствах теорем из [1]. Подчеркнем, что дальнейшее изложение отнюдь не ставило целью обобщение некоторых результатов [1], а единственно обусловлено желанием пояснить идею их доказательства. В частности понять насколько по существу оценка отклонения итерационных степеней оператора от подпространства для оценок отклонения образа оператора от его аргумента. Сам метод доказательства нам представляется имеющим самостоятельный интерес, который не ограничен кругом задач, рассматриваемых в препринте. Итак, начнем с теоремы Джексона. Теоремой типа Джексона обычно называют оценку приближения функции некоторым заданным множеством функций через структурную характеристику функции, отражающую ее "непрерывность". Переходя к абстрактным формулировкам, предположим, что задано некоторое пространство функций (нашей сценой будет банахово пространство и функции - это его элементы) и некоторый оператор, действующий из этого пространства в него же. Будем измерять структурную характеристику степени непрерывности функции через расстояние от образа функции под действием этого оператора до функции. При этом важно, чтобы у оператора не было чересчур много нетривиальных неподвижных точек. Иначе никакие оценки не получишь.

Сформулируем кратко идею доказательства теоремы Джексона в [1]. Мы хотим оценить расстояние от функции до некоторого подпространства (тригонометрических многочленов заданной степени) через расстояние от функции до значения оператора на этой функции (средних Стеклова от функции). Если смотреть на разность функции и многочлена с одной стороны и разность функции и образа функции под действием оператора, с другой, то это разные вещи - значение оператора не полином. Однако можно заметить – и это нам представляется важным – что итерации оператора от произвольной функции все ближе подходят к заданному подпространству, и в пределе стремятся к элементу из него (к константе равной среднему значению на периоде).

Перейдем к абстрактным формулировкам. Нам представляется, что чем в более общем виде сформулировано утверждение, тем яснее стоящие за ним механизмы, т.к. они не затемнены лишними предположениями или деталями специального характера. Однако не будем формулировать теорему в максимальной общности, (которую можно было бы расширить до метрических (не линейных) пространств или заменить линейные операторы на нелинейные) чтобы не затемнить основную идею.

Теорема БК. *Пусть X - банахово пространство и L – некоторое его подпространство. Пусть S – линейный оператор, действующий из X в X . Предположим, что для каждого m существует линейный оператор T_m из X в L, такой что*

$$\|S^m - T_m\| \le c_m \tag{1}$$

и ряд $1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m$ сходится к числу c.

Пусть также для каждой $f \in X$ существует

$$\lim_{m\to\infty} S^m f = S^\infty f \quad \text{и} \quad S^\infty f \in L \tag{2}$$

Тогда существует линейный оператор T из X в L, такой что

$$\|f - Tf\| \le c\|f - Sf\|. \tag{3}$$

Доказательство. Напишем "телескопическое тождество"

$$I = I - S + S - S^2 + S^2 - \cdots + S^n - S^{n+1} + S^{n+1} =$$
$$I - S + S(I - S) + \cdots + S^n(I - S) + S^{n+1}.$$

Откуда

$$I - (T_1 + T_2 + \cdots + T_n)(I - S) = (I + (S - T_1) + (S^2 - T_2) + \cdots (S^n - T_n))(I - S) + S^{n+1}.$$

В правой части последнего тождества ряд из операторов в скобках сходится и последний член стремится к пределу равному S^∞. Поэтому сходится и ряд в левой части. Осталось положить

$$T = \left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n\right)(I - S) + S^\infty$$

и заметить, что оператор T действует из X в L. То, что последнее слагаемое – линейный оператор, сразу следует из (2). Теперь

$$\|f - Tf\| = \lim_{m\to\infty} \|f - \left(\sum_{n=1}^{m} T_n(f - Sf) + S^\infty f\right)\| \le \lim_{m\to\infty}(1 + c_1 + \cdots + c_m)\|f - Sf\|,$$

откуда сразу следует (3).

Как было отмечено в начале заметки, нашей целью было прояснение вопроса о том, насколько условия (1) существенны в рассматриваемых задачах. Частичным ответом на этот вопрос является следующее наблюдение

Назовем оператор S *устойчивым*, если для любой $f \in X$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|S^m f - S^{m+1} f\| < \infty. \tag{4}$$

Мы предпочитаем слово устойчивый слову сжимающий, поскольку проектор или тождественный оператор очевидно удовлетворяет (4), однако ничего не сжимает.

Критерий БК. *Пусть S — линейный устойчивый оператор, действующий из X в X. Тогда для того, чтобы существовал линейный оператор T из X в L, такой, что для всех $f \in X$*

$$\|f - Tf\| \le c\|f - Sf\|$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого $m \in N$ существовал линейный оператор T_m из X в L, такой что

$$\|S^m - T_m\| < c_m$$

и ряд $\sum c_m$ сходился.

Достаточность. Пусть $f \in X$. Тогда

$$\|(T_m - T_l)f\| \le (c_m + c_1)\|f\| + \sum_{k=m}^{l-1} \|S^{k+1} f - S^k f\|,$$

и, в силу устойчивости оператора и условия теоремы, последовательность $\{T^m\}$ является последовательностью Коши, для которой существует предел L. Обозначим этот предел S^∞. Ясно, что его образ лежит в заданном подпространстве. Теперь

$$\|(S^\infty - S^m)f\| \leq \|S^\infty f - T_m f\| + \|T_m f - S^m f\|.$$

Первое слагаемое стремится к 0, по определнию, а второе в силу (1). Таким образом выполнено (2) и достаточность следует из теоремы БК.

Необходимость. Пусть выполнено (3). Запишем (3) для $S^m f$ *положим* $T_m f = TS^m f$. Остается сложить неравенства.

Замечание 1. Таким образом, например, для средних Стеклова, получаем *линейный оператор*, доставляющий тригонометрический полином заданного порядка с наилучшей постоянной. Поскольку константу уменьшить на всем классе нельзя, то мы получаем линейный метод суммирования наилучший на всем классе. Как обычно класс гладкости можно задать мажорантой (модулем непрерывности) отклонения средних Стеклова от функции.

Замечание 2. Заметим, что если существует оператор T для которого выполняется (1) с константой $c < 1$, то тогда для всех m найдутся $T_m : X \to L$, такие, что выполняется (1) с константой $c_m = c^m$.

Действительно, надо только раскрыть скобки в выражении

$$(T - S)^m = T^m - T^{m-1}S^1 + \cdots (-1)^m S^m =$$

$$(-1)^m((-1)^m T^m + (-1)^{m+1}T^{m-1}S + \cdots + S^m) = (-1)^m(S^m - T_m).$$

Фактически это теорема 2 из [1]. Разумеется, константа получается не лучшая. Мы ведь просто подобрали операторы проектирования на подпространство, а не выбрали их лучшими. Однако, в некоторых задачах, когда не известны точные оценки приближения проектировщиков к высоким степеням оператора, это замечание может пригодиться.

Замечание 3. Обратим внимание на то, что в заданной степени общности из (1) не следует не только (3), но даже существование $\lim_{m\to\infty} S^m = S^\infty$. Действительно, пусть $X = R^2$, $L = \{(x, y) : y = 0\}$, $S(x, y) = (2x, y/2)$, так что $S^n(x, y) = (2^n x, 2^{-n} y)$ и $T_n(x, y) = (2^n x, 0)$. Легко видеть, что $\|S^n - T_n\| = 2^{-n}$, однако не существует $\lim_{m\to\infty} S^m$. Заметим, однако, что тем не менее здесь (3) выполняется! Поэтому вопрос о необходимости существования предела остается пока открытым.

Замечание 4 (для конечномерных точно, а для этих может и нет - не дописал)

Отметим, что в пространстве $L^2(T)$ для операторов инвариантных относительно сдвига существует дихотомия - либо оператор устойчивый, либо его степени не имеют предела. Действительно, все такие операторы задаются мультипликаторами, а мультипликаторы степени оператора есть обычные степени исходного мультипликатора. Мультипликаторы есть функции определенные на множестве целых чисел и принимающие значения во множестве комплексных чисел. Однако степени комплексного числа имеют предел только в том случае, если число лежит строго внутри единичного круга и тогда предел 0, или число равно 1 и тогда предел степеней равен 1. Поэтому если последовательность операторов S имеет предел S^∞, то действуя оператором на гармонику с фиксированным номером, можно заметить, что соответствующий мультипликатор принимает значения из множества $\{0,1\}$ и в тех точках, где

$$m(S^\infty)=1, \quad m(S^k)=m(S)=1,$$

а там, где

$$m(S^\infty)=0, \quad m(S^k)=\omega^k,\ |\omega|<1$$

Отсюда сразу следует (4).

Список литературы

[1] Babenko A.G., Kryakin Yu.V. *On $T_n^\perp$ spaces* ArXiv:0812.2744v1 [math. CA] (2008) 1–13.