Труды Международной летней математической
Школы С. Б. Стечкина по теории функций
Россия, Алексин, 1–9 августа, 2007. С. 22–39

Полиномиальные интерполяционно-ортогональные базисы

А. Г. Бабенко [1], Ю. В. Крякин [2]

[1] *Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия*
[2] *Mathematical Institute of the Wroclaw University, Wroclaw, Poland*

Аннотация. Основным объектом исследования данной работы являются алгебраические полиномиальные базисы, которые являются одновременно интерполяционными и ортогональными на $\mathbb{R}$ с положительным весом. Рассматриваются аналогичные базисы в пространстве четных тригонометрических полиномов.

Abstract. **Banenko A. G., Kryakin Yu. V. Polynomial interpolation-orthogonal bases.** The main objects of the paper are algebraic polynomial bases on $\mathbb{R}$, which are simultaneously interpolational and orthogonal with respect to positive weight. Similar bases in the space of even trigonometric polynomials were considered.

1. Введение. Хорошо известна [1, т. 2, с. 15] следующая квадратурная формула:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi + \frac{2\pi k}{n}\right), \quad \xi \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty), \tag{1}$$

справедливая на пространстве T_{n-1} тригонометрических полиномов

$$f(t) = \sum_{|k|\leqslant n-1} c_k e^{ikt}, \quad n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3 \ldots\}$$

степени не выше $n-1$ с комплексными коэффициентами.

Рассмотрим случай, когда число $n-1 = 2m$ является четным. В этом случае формула (1) приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2m+1}\sum_{k=0}^{2m} f\left(\xi + \frac{2\pi k}{2m+1}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad f \in T_{2m}. \tag{2}$$

Точки

$$t_k := \xi + \frac{2\pi k}{2m+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2m$$

называются *узлами квадратурной формулы* (2).

Рассмотрим полиномы

$$\ell_j(t) := \frac{\prod\limits_{0\leqslant k\neq j\leqslant 2m} 2\sin\frac{t-t_k}{2}}{\prod\limits_{0\leqslant k\neq j\leqslant 2m} 2\sin\frac{t_j-t_k}{2}}, \quad j = 0, 1, \ldots, 2m,$$

Исследования первого из авторов поддержаны РФФИ (проект № 05-01-00233), Интеграционным проектом фундаментальных научных исследований, выполняемых в УрО РАН совместно с учеными СО РАН, и Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-5120.2006.1). Исследования второго автора поддержаны правительством Польши (грант 201 016 31/1206).

которые называются [1, т. 2, с. 6] *фундаментальными полиномами*, соответствующими набору точек $t_0, t_1, \ldots, t_{2m}$. Известно [1] [1, т. 2, с. 10], что в интересующем нас случае равноотстоящих узлов, фундаментальные полиномы с точностью до постоянного множителя совпадают с обычными сдвижками ядра Дирихле, а именно

$$\ell_j(t) = \frac{1}{2m+1}\mathfrak{D}_m(t-t_j), \quad t_j = \xi + \frac{2\pi j}{2m+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, 2m, \tag{3}$$

где

$$\mathfrak{D}_m(t) := \sum_{|k|\leqslant m} e^{ikt} = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt = \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \tag{4}$$

есть *ядро Дирихле* степени m.

Полиномы ℓ_j образуют интерполяционный базис пространства T_m, т.е.

$$f(t) = \sum_{j=0}^{2m} f(t_j)\ell_j(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad f \in T_m. \tag{5}$$

Кроме того, каждый из полиномов ℓ_j системы (3) имеет степень m, т.е. $\deg \ell_j = m$. Поэтому $\deg \ell_j\ell_\nu = 2m$ при $0 \leqslant j, \nu \leqslant 2m$. А если выполнено условие $0 \leqslant j \neq \nu \leqslant 2m$, то полином $g(t) = \ell_j(t)\ell_\nu(t)$ обращается в ноль во всех узлах квадратурной формулы (2). Следовательно

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ell_j(t)\ell_\nu(t)\,dt = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant j \neq \nu \leqslant 2m. \tag{6}$$

Таким образом, для системы (3) одновременно выполняются два свойства (5) и (6). Иными словами, справедливо следующее утверждение (см., например, [1, с. 16], [4, с. 56]).

Теорема A. *Система* (3) *фундаментальных полиномов* $\{\ell_j\}_{j=0}^{2m}$ *образует базис пространства* T_m, *который является одновременно интерполяционным и ортогональным на периоде с единичным весом.*

Аналогичным свойством в пространстве W_σ^2 целых функций $f \in L^2(\mathbb{R})$ экспоненциального типа $\sigma > 0$ обладает система всплесков Котельникова–Шеннона, которая широко применяется в радиотехнике. Важное свойство этой системы заключается в том, что она является одновременно интерполяционной и ортогональной на оси $\mathbb{R}$ с единичным весом. Это свойство является содержательной частью известной [5, 6] (см. также [7, гл. 3, §1, с. 89-95]) теоремы об отсчетах для функций $f \in W_\sigma^2$.

---

[1] Л.Фейер [2] (см. также формулы (62)–(67) на с. 441,442 в [3]) рассмотрел точки вида $t_k = \frac{2\pi k}{2m+1}$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, 2m$, а также систему функций

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2m+1}}, \quad \varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{2m+1}}\cos t, \quad \varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{2m+1}}\sin t, \ldots$$
$$\ldots, \varphi_{2m-1}(t) = \sqrt{\frac{2}{2m+1}}\cos mt, \quad \varphi_{2m}(t) = \sqrt{\frac{2}{2m+1}}\sin mt.$$

Он заметил, что поскольку матрица

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(t_0) & \varphi_1(t_0) & \cdot & \cdot & \varphi_{2m-1}(t_0) & \varphi_{2m}(t_0) \\ \varphi_0(t_1) & \varphi_1(t_1) & \cdot & \cdot & \varphi_{2m-1}(t_1) & \varphi_{2m}(t_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_0(t_{2m}) & \varphi_1(t_{2m}) & \cdot & \cdot & \varphi_{2m-1}(t_{2m}) & \varphi_{2m}(t_{2m}) \end{pmatrix}$$

является унитарной (т.е. строки матрицы образуют ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^{2m+1}$), то выражение

$$\varphi_0(t_k)\varphi_0(t) + \varphi_1(t_k)\varphi_1(t) + \ldots + \varphi_{2m-1}(t_k)\varphi_{2m-1}(t) + \varphi_{2m}(t_k)\varphi_{2m}(t)$$

равняется нулю при $t = t_j$, $0 \leqslant j \neq k \leqslant 2m$ и равняется единицы при $t = t_k$. Следовательно, это выражение есть фундаментальный полином $\ell_k(t)$. Отсюда следует утверждение (3) при $\xi = 0$.

Недавно Ю.Н.Субботин и Н.И.Черных [8], на основе предложенной ими модификации функций Мейера, построили новый класс систем целых функций, которые образуют интерполяционно-ортогональные базисы всплесков различных пространств функций на оси $\mathbb{R}$ и на периоде. Важным преимуществом построенных ими систем, по сравнению с системой Котельникова–Шеннона, является ограниченность соответствующих констант Лебега.

В данной работе изучаются базисы в пространстве алгебраических полиномов, которые являются одновременно интерполяционными и ортогональными на вещественной оси $\mathbb{R}$ с весом достаточно общего вида. Аналогичные базисы рассматриваются также в пространстве четных тригонометрических полиномов.

2. Интерполяционно-ортогональный базис в пространстве алгебраических полиномов со скалярным произведением. Пусть $\mathcal{P}_m$ есть пространство алгебраических полиномов $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_mx^m$ степени не выше m ($\deg p \leqslant m$) с вещественными коэффициентами $c_0, \ldots, c_m$. Положим $\mathcal{P} := \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \mathcal{P}_m$.

Рассмотрим неубывающую функцию $\mu:\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ с бесконечным числом точек роста [1] такую, что каждый полином $p \in \mathcal{P}$ является μ-интегрируемым на $\mathbb{R}$, т.е. для любого полинома $p \in \mathcal{P}$ существует интеграл Лебега–Стилтьеса $\int\limits_{\mathbb{R}} p(x)\, d\mu(x)$. Распределение $d\mu(x)$ условимся называть *весом*. Обозначим через $\{p_m\}_{m=0}^{\infty}$ ($\deg p_m = m$, старший коэффициент k_m полинома p_m положителен) — систему алгебраических полиномов, ортонормированную относительно следующего скалярного произведения в пространстве $\mathcal{P}$:

$$\langle f, g\rangle_\mu := \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\, d\mu(x). \tag{7}$$

Ядром Кристоффеля–Дарбу называется полином (см. [9, с. 56, (3.2.3)])

$$K_{n-1}(y,x) := \sum_{j=0}^{n-1} p_j(y)p_j(x) = a_n \frac{p_{n-1}(y)p_n(x) - p_n(y)p_{n-1}(x)}{x-y}, \tag{8}$$

где $a_n = \frac{k_{n-1}}{k_n}$ — положительное число, зависящее только от n и μ. При $x = y$ имеем (см. [9, с. 56, (3.2.4)])

$$K_{n-1}(x,x) = \sum_{j=0}^{n-1} p_j^2(x) = a_n\{p_n'(x)p_{n-1}(x) - p_{n-1}'(x)p_n(x)\}. \tag{9}$$

Приведем несколько важных свойств ядра $K_{n-1}(y,x)$. Ясно, что ядро $K_{n-1}(y,x)$ является симметричным, т.е. $K_{n-1}(y,x) = K_{n-1}(x,y)$ при любых $x, y \in \mathbb{R}$. Известно (см. [10, с. 7]), что ядро $K_{n-1}(y,x)$ не зависит от того, с помощью какого ортонормированного базиса $\{\psi_j\}_{j=0}^{n-1}$ в $\mathcal{P}_{n-1}$ на оси с весом $d\mu(x)$ он представлен в форме $K_{n-1}(y,x) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \psi_j(y)\psi_j(x)$.

Другим важным свойством ядра Кристоффеля–Дарбу является свойство неотрицательной определенности. Напомним (см. [10, с. 6–7]), что симметричное ядро $H(x,y)$, удовлетворяющее условию $\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |H(x,y)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(y) < \infty$, называется *неотрицательно определенным*, если для любой функции $f \in L^2_\mu(\mathbb{R})$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} H(y,x)f(x)f(y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \geqslant 0. \tag{10}$$

[1] Точка $\gamma \in \mathbb{R}$ называется *точкой роста* неубывающей функции μ, если для любых чисел α, β таких, что $\alpha < \gamma < \beta$, выполняется строгое неравенство $\mu(\alpha) < \mu(\beta)$.

Здесь $L^p_\mu(\mathbb{R})$, $p \geqslant 1$ есть пространство функций $f:\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, измеримых относительно $\mu(x)$ и для которых существует интеграл Лебега–Стилтьеса $\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, d\mu(x)$.

Очевидно, что линейная комбинация

$$F(x,y) = \sum_{\nu=1}^{r} \eta_\nu K_{\nu-1}(y,x), \quad r \in \mathbb{N} \tag{11}$$

с неотрицательными коэффициентами $\eta_\nu \geqslant 0$ является неотрицательно определенным ядром. Класс непрерывных неотрицательно определенных ядер является замкнутым относительно операции произведения [11] (см. также [12, отдел 7, § 3, задача 35, с. 119]), т.е. если $F(x,y)$, $G(x,y)$ являются непрерывными неотрицательно определенными ядрами, то $R(x,y) = F(x,y)G(x,y)$ также будет непрерывным неотрицательно определенным ядром.

И наконец, для произвольного непрерывного неотрицательно определенного ядра $F(x,y)$ вида (11) выполняется неравенство [10, с. 6–8]:

$$F(X) \geqslant F(\mathbb{R}), \tag{12}$$

между *дискретным средним*

$$F(X) := \frac{1}{N^2} \sum_{0 \leqslant j,k \leqslant N-1} F(\xi_j, \xi_k), \tag{13}$$

(здесь X —произвольное конечное множество различных точек $\xi_0, \xi_2, \ldots, \xi_{N-1}$ из $\mathbb{R}$) и *непрерывным средним* [1]

$$F(\mathbb{R}) := \frac{1}{\left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} d\mu(y) \right\}^2} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} F(x,y) \, d\mu(x) \, d\mu(y) = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{r} \eta_\nu}{\int\limits_{\mathbb{R}} d\mu(y)}. \tag{14}$$

Ниже в теореме 1 будет показана взаимосвязь ядра $K_{n-1}(y,x)$, заданного формулой (8), с системой фундаментальных полиномов Лагранжа, ассоциированной с нулями полинома

$$w(x) := p_{n-1}(x_0)p_n(x) - p_n(x_0)p_{n-1}(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad p_{n-1}(x_0) \neq 0, \tag{15}$$

который, как известно [9, с. 59, теорема 3.3.4], имеет n различных вещественных нулей $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Положим

$$w_\nu(x) := \frac{w(x)}{x - x_\nu} = \frac{p_{n-1}(x_0)p_n(x) - p_n(x_0)p_{n-1}(x)}{x - x_\nu}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{16}$$

Систему фундаментальных полиномов Лагранжа

$$\ell_\nu(x) := \prod_{0 \leqslant j \neq \nu \leqslant n-1} \frac{x - x_j}{x_\nu - x_j} = \frac{w_\nu(x)}{w_\nu(x_\nu)}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{17}$$

соответствующую указанному набору узлов интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, назовем *базисом Кристоффеля–Дарбу* пространства $\mathcal{P}_{n-1}$.

Такое название базиса мотивировано тем, что каждый полином $\ell_\nu(x)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с ядром Кристоффеля–Дарбу $K_{n-1}(x_\nu, x)$. По построению, базис (17) является интерполяционным, т.е.

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} p(x_j) \ell_j(x), \quad p \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

---

[1] В последнем равенстве в (14) мы воспользовались ортонормированностью системы $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$ и представлением $K_{\nu-1}(y,x) = \sum\limits_{j=0}^{\nu-1} p_j(y)p_j(x)$, в силу чего, $\int\limits_{\mathbb{R}} F(x,y)\, d\mu(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{r} \eta_\nu$.

Кроме того, этот базис является ортогональным относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mu$.

Теорема 1. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $x_0\in\mathbb{R}$ *и* $p_{n-1}(x_0)\neq 0$. *Тогда система* (17) *фундаментальных полиномов Лагранжа* ℓ_ν *обладает следующими свойствами*:

$$\langle\ell_j,\ell_k\rangle_\mu=0 \quad \text{при} \quad 0\leqslant j\neq k\leqslant n-1; \tag{18}$$

$$K_{n-1}(x_\nu,x)=A_\nu\ell_\nu(x) \quad \text{при} \quad \nu=0,1,\dots,n-1, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{19}$$

где числа A_ν *при всех* $\nu=0,1,\dots,n-1$ *вычисляются по формуле*

$$A_\nu=a_np_{n-1}(x_\nu)\frac{p_{n-1}(x_0)p_n'(x_\nu)-p_n(x_0)p_{n-1}'(x_\nu)}{p_{n-1}(x_0)}=$$
$$=K_{n-1}(x_\nu,x_\nu)=a_n\{p_n'(x_\nu)p_{n-1}(x_\nu)-p_{n-1}'(x_\nu)p_n(x_\nu)\}. \tag{20}$$

Доказательство. Утверждения теоремы будем доказывать в следующем порядке: сначала докажем утверждение (19), а затем — утверждения (20) и (18).

Приступим к доказательству утверждения (19). По условию теоремы $p_{n-1}(x_0)\neq 0$. Из определения чисел x_ν, $\nu=0,1,\dots,n-1$ следует, что

$$p_{n-1}(x_0)p_n(x_\nu)=p_n(x_0)p_{n-1}(x_\nu) \quad \text{при} \qquad 1\leqslant\nu\leqslant n-1. \tag{21}$$

Рассмотрим сначала случай когда $p_n(x_0)\neq 0$. В этом случае полином

$$w(x)=p_{n-1}(x_0)p_n(x)-p_n(x_0)p_{n-1}(x)$$

не имеет общих нулей ни с одним из полиномов $p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$. Этот факт содержится в [13, теорема 5.1]. Поэтому обе части равенства (21) отличны от нуля при всех $1\leqslant\nu\leqslant n-1$. В частности,

$$p_{n-1}(x_\nu)\neq 0 \quad \text{при} \quad \nu=0,1,\dots,n-1.$$

Из определений (16), (15), (8) получаем $a_nw_0(x)=K_{n-1}(x_0,x)$. Отсюда и последнего равенства в (17) вытекает равенство

$$a_nw_0(x_0)\ell_0(x)=K_{n-1}(x_0,x), \tag{22}$$

которое содержит в себе утверждение (19) при $\nu=0$.

Пусть $1\leqslant\nu\leqslant n-1$. Для доказательства утверждения (19) достаточно убедиться в справедливости равенства

$$p_{n-1}(x_0)\cdot(x-x_\nu)\cdot K_{n-1}(x_\nu,x)=p_{n-1}(x_\nu)\cdot(x-x_0)\cdot K_{n-1}(x_0,x). \tag{23}$$

В силу (8), утверждение (23) эквивалентно следующему:

$$p_{n-1}(x_0)\cdot[p_{n-1}(x_\nu)p_n(x)-p_n(x_\nu)p_{n-1}(x)]=p_{n-1}(x_\nu)\cdot[p_{n-1}(x_0)p_n(x)-p_n(x_0)p_{n-1}(x)]. \tag{24}$$

Равенство (24) следует из равенства (21).

Осталось рассмотреть случай когда $p_n(x_0)=0$. В этом случае нули полинома $K_{n-1}(x_0,x)$ совпадают с нулями полинома p_n, отличными от x_0. Но поскольку полиномы p_n, p_{n-1} не имеют общих нулей, то

$$p_{n-1}(x_\nu)\neq 0 \quad \text{при} \quad \nu=0,1,\dots,n-1.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, что приведены для предыдущего случая, начиная с (22).

Чтобы получить формулу (20) для чисел A_ν при $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$ воспользуемся следующей цепочкой равенств:

$$K_{n-1}(x_\nu, x) = a_n \frac{p_{n-1}(x_\nu)p_n(x) - p_n(x_\nu)p_{n-1}(x)}{x - x_\nu} = A_\nu \ell_\nu(x) = \frac{A_\nu}{w_\nu(x_\nu)} w_\nu(x) =$$
$$= \frac{A_\nu}{w_\nu(x_\nu)} \frac{p_{n-1}(x_0)p_n(x) - p_n(x_0)p_{n-1}(x)}{x - x_\nu},$$

вытекающей из (8), (19), (17), (16), (15). Отсюда и (24) получаем

$$A_\nu = a_n w_\nu(x_\nu) \frac{p_{n-1}(x_\nu)p_n(x) - p_n(x_\nu)p_{n-1}(x)}{p_{n-1}(x_0)p_n(x) - p_n(x_0)p_{n-1}(x)} = a_n w_\nu(x_\nu) \frac{p_{n-1}(x_\nu)}{p_{n-1}(x_0)}.$$

Теперь остается учесть равенство

$$w_\nu(x_\nu) = p_{n-1}(x_0)p_n'(x_\nu) - p_n(x_0)p_{n-1}'(x_\nu),$$

которое следует из (16). Таким образом, при $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$ первая часть формулы (20) доказана. Вторая часть этой формулы следует из (19), равенства $\ell_\nu(x_\nu) = 1$ и формулы (9). С помощью равенства (22) легко убедиться в справедливости формулы (20) и при $\nu = 0$.

Перейдем к доказательству утверждения (18). Определение (8) и свойство ортонормированности системы $\{p_j\}_{j=0}^\infty$ влекут равенства [9, с. 53, (3.1.12)]

$$\langle K_{n-1}(h,\cdot), K_{n-1}(g,\cdot)\rangle_\mu = \sum_{j=0}^{n-1} p_j(h)p_j(g) = K_{n-1}(h,g), \quad h, g \in \mathbb{R}.$$

С помощью этой формулы, определения чисел x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ и утверждения (19) получаем утверждение (18). Теорема 1 доказана.

Введем следующие обозначения: $\mathfrak{S}(\mu)$ — множество точек роста функции μ, которое называется *спектром* (*носителем*) веса $d\mu(x)$. Как известно, множество $\mathfrak{S}(\mu)$ является замкнутым [1]. Выпуклую оболочку множества $\mathfrak{S}(\mu)$ обозначим символом $\mathcal{M}(\mu)$, а через $\mathcal{N}(\mu)$ обозначим замыкание дополнения $\mathbb{R} \setminus \mathcal{M}(\mu)$. Множество $\mathcal{M}(\mu)$ назовем *промежутком ортогональности*. В случае когда промежутком ортогональности является конечным отрезком $[a, b]$, условимся называть его (*истинным*) *отрезком ортогональности*; такое название связано с равенством $L^1_\mu(\mathbb{R}) = L^1_\mu[a, b]$, которое означает, что для любой функции $f \in L^1_\mu(\mathbb{R})$ выполняются равенства

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathcal{M}(\mu)} f(x)\,d\mu(x) = \int_a^b f(x)\,d\mu(x). \tag{25}$$

Иногда указанный отрезок $[a, b]$ будем называть *отрезком ортогональности* соответствующей ортонормированной системы полиномов $\{p_j\}_{j=0}^\infty$.

Приведем еще один способ доказательства утверждения (18) теоремы 1, который основан на известных квадратурных формулах наивысшей алгебраической степени точности и рассуждениях аналогичных тем, которые применялись при доказательстве теоремы А.

Рассмотрим сначала случай, когда точка x_0 совпадает с одним из нулей полинома p_n, т.е. $p_n(x_0) = 0$. Обозначим через $x_1, \ldots, x_{n-1}$ остальные нули полинома p_n. Известна (см. [9, с. 60, теорема 3.4.1], [14]) *квадратурная формула Гаусса–Якоби* наивысшей алгебраической степени точности

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f(x_k), \quad f \in \mathcal{P}_{2n-1}. \tag{26}$$

[1] Напомним, что здесь рассматривается неубывающие функции μ с бесконечным числом точек роста. Свойство замкнутости спектра $\mathfrak{S}(\mu)$ следует из утверждения, что любая предельная точка спектра принадлежит ему, что в свою очередь, следует из определения точки роста.

Числа λ_k однозначно определяются функцией μ и натуральным числом n. Эти числа называются *коэффициентами Кристоффеля*. Для них есть несколько явных представлений (см. [9, с. 61, (3.4.6)-(3.4.8)]), в частности, такие

$$\lambda_\nu = \frac{k_n}{k_{n-1}} \cdot \frac{1}{p_{n-1}(x_\nu)p_n'(x_\nu)}, \tag{27}$$

$$\frac{1}{\lambda_\nu} = \sum_{j=0}^{n-1} p_j^2(x_\nu) = K_{n-1}(x_\nu, x_\nu). \tag{28}$$

Все узлы x_k квадратурной формулы (26) являются нулями полинома p_n, поэтому [1]

$$\sum_{j=0}^{n-1} p_j(x_k)p_j(x_r) = K_{n-1}(x_k, x_r) =$$

$$= a_n \frac{p_{n-1}(x_k)p_n(x_r) - p_n(x_k)p_{n-1}(x_r)}{x_k - x_r} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant k \neq r \leqslant n-1. \tag{29}$$

Каждый из фундаментальных полиномов Лагранжа ℓ_ν системы (17) имеет степень $n-1$. Следовательно произведение $g = \ell_\nu \ell_j$ двух различных полиномов этой системы является полиномом степени $2(n-1)$, который обращается в ноль во всех узлах квадратурной формулы (26). Отсюда получаем утверждение (18) теоремы 1 в случае $p_n(x_0) = 0$.

Кроме того, как отмечается в дополнении к монографии [9] (см. формулы (XIV.2) на с. 480) из (26) и (28)–(29) вытекают следующие соотношения:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu p_k(x_\nu)p_j(x_\nu) = \delta_{k,j}, \quad 0 \leqslant k, j \leqslant n-1, \tag{30}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} p_j(x_k)p_j(x_r) = \frac{1}{\lambda_k}\delta_{k,r}, \quad 0 \leqslant k, r \leqslant n-1, \tag{31}$$

где $\delta_{k,r}$ — символ Кронекера.

Соотношение (31) означает, что матрица

$$P(n) := \begin{pmatrix} p_0(x_0) & p_1(x_0) & \ldots & p_{n-1}(x_0) \\ p_0(x_1) & p_1(x_1) & \ldots & p_{n-1}(x_1) \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ p_0(x_{n-1}) & p_1(x_{n-1}) & \ldots & p_{n-1}(x_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

является ортогональной. Отметим, что в случае, когда узлы расположены в возрастающем порядке: $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$, определитель матрицы $P(n)$ положителен, т.е.

$$\det P(n) > 0 \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

[1] Выберем в (12) в качестве множества X набор $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ всех нулей полинома p_n и рассмотрим соответствующее дискретное среднее для ядра $K_{n-1}(x, y)$

$$K_{n-1}(X) = \frac{1}{n^2} \sum_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} K_{n-1}(x_j, x_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{0 \leqslant j \leqslant n-1} K_{n-1}(x_j, x_j) = \frac{1}{n^2} \sum_{0 \leqslant j \leqslant n-1} \frac{1}{\lambda_j}.$$

Отсюда и (12), (14), (11), (26) вытекает, что

$$\frac{1}{n^2} \sum_{0 \leqslant j \leqslant n-1} \frac{1}{\lambda_j} \geqslant \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} d\mu(x)}, \qquad \sum_{0 \leqslant j \leqslant n-1} \lambda_j = \int_{\mathbb{R}} d\mu(x), \qquad \left(\sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \lambda_k \right) \cdot \left(\sum_{0 \leqslant j \leqslant n-1} \frac{1}{\lambda_j} \right) \geqslant n^2.$$

Последнее неравенство известно [15, утверждение D.3.b, с. 81], причем оно выполняется для любого набора положительных чисел $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ и обращается в равенство только в случае, когда все числа λ_k равны между собой. Это обстоятельство приводит к предположению, что для для любого набора положительных чисел $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ найдется неубывающая функция $\mu(x)$, для которой будет выполняться квадратурная формула наивысшей алгебраической степени точности вида (26).

поскольку $\det P(n)$ с точностью до положительного множителя [1] $c(n) := k_0 k_1 \dots k_{n-1}$ совпадает с определителем Вандермонда, а именно [2]

$$\det P(n) = c(n) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & . & . & . & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & . & . & . & x_1^{n-1} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_{n-1} & . & . & . & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = c(n) \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} (x_k - x_j), \quad n \geqslant 2.$$

Повторив рассуждения Л.Фейера (см. сноску 1 на стр. 23), заключаем, что выражение

$$p_0(x_k)p_0(x) + p_1(x_k)p_1(x) + \ldots + p_{n-1}(x_k)p_{n-1}(x)$$

равняется нулю при $x = x_j$, $0 \leqslant j \neq k \leqslant n-1$ и равняется $\frac{1}{\lambda_k}$ при $x = x_k$. Следовательно, это выражение с точностью до множителя $\frac{1}{\lambda_k}$ совпадает с фундаментальным полиномом Лагранжа $\ell_k(x)$, т.е.

$$K_{n-1}(x_k, x) = \frac{1}{\lambda_k} \ell_k(x).$$

Отсюда и (27) следуют утверждения (20), (19) теоремы 1 в случае, когда $p_n(x_0) = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда точка x_0 принадлежит множеству $\mathcal{N}(\mu)$. Известно (см. [16, с. 465, теорема I; с. 467, следствие 2, частные случаи (α) и (β)], [17, гл. 9, § 2], [18, гл. 1, § 1, с. 19–20]) существование *квадратурной формулы Маркова* наивысшей алгебраической степени точности с одним фиксированным узлом x_0 и $n-1$ свободными узлами $x_1, \dots, x_{n-1}$. Такая формула будет точной на пространстве $\mathcal{P}_{2(n-1)}$. Кроме того, в силу теоремы 1 из [17, гл. 9, § 1, с. 162-163], теоремы 3.1.4 из [9, гл. 3, §3.1, с. 53] и замечания к ней, узлы $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ совпадают с нулями полинома $w(x)$, определенного выше формулой (15). Используя эту квадратурную формулу несложно получить утверждение (18) теоремы 2, аналогично тому, как это делалось в предыдущем случае.

Применяя теорему 3.3.4 из [9, с. 59], формулу (3.1.12) и схему доказательства теоремы 3.1.4 из [9, с. 53], а также теорему 1 из [17, гл. 9, § 1, с. 162–163], можно доказать справедливость следующего утверждения, которое содержится в фундаментальной работе Шохата [16, с. 465, теорема I; с. 467, следствие 2, частные случаи (α) и (β)].

Теорема B. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $p_{n-1}(x_0) \neq 0$, $x_1, \dots, x_{n-1}$ — нули полинома w (см. (15)), отличные от x_0. Тогда справедлива квадратурная формула*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu(x) = \lambda_0^* f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k), \quad f \in \mathcal{P}_{2(n-1)} \tag{32}$$

с положительными коэффициентами λ_0^*, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$.

Замечание 1. Теорема B позволяет получить утверждение (18) в условиях теоремы 1; утверждение (18) содержится в работе [19, с. 149] (подробно об этом сказано ниже, см. формулы (44), (53), (55) в случае $\beta_n = 0$). Если точка x_0 является одним из нулей полинома p_n, то формула (32) будет выполняться на $\mathcal{P}_{2n-1}$ и совпадет с (26); в этом случае все утверждения теоремы 1 известны [9, теорема 14.2.1, с. 338; формулы (15.1.6), (15.2.7), с. 354, 356; а также формула (XIV.6), с. 480]. В случае чебышевских весов "первого и второго рода" $d\mu(x) = (1-x^2)^\alpha\, dx$, $\alpha = \pm 1/2$ с носителем $[-1, 1]$ и при $p_n(x_0) = 0$, утверждения (19), (20) были получены Л.Фейром: в случае $\alpha = -1/2$ см. формулы (50)–(56) на с. 439, 440, а также формулу (3) на с. 466 в [3]; в случае $\alpha = 1/2$ см. выделенную формулу в сноске 14 на с. 471 в [3], правда в этой формуле допущена опечатка, а именно в правой части равенства произведение $\sin\theta_k \sin r\theta_k$ нужно заменить на дробь $\frac{\sin r\theta_k}{\sin\theta_k}$.

---

[1] Напомним, что k_m есть старший коэффициент полинома p_m.

[2] При $n = 1$ имеем $\det P(1) = c(1) = k_0$.

3. Некоторые аппроксимативные свойства алгебраических интерполяционно-ортогональных базисов. В данном пункте будем предполагать, что отрезок ортогональности совпадает с $[-1,1]$, т.е. $\mathcal{M}(\mu)=[-1,1]$. Рассмотрим линейную комбинацию двух подряд идущих ортогональных полиномов

$$W(x) := p_n(x) + \alpha_n p_{n-1}(x), \quad \alpha_n \in \mathbb{R}. \tag{33}$$

Как известно [16, с. 465, теорема I; с. 467, следствие 2, частные случаи (α) и (β)], [9, с. 59, теорема 3.3.4], этот полином имеет n различных вещественных нулей $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, причем не боле чем один из этих нулей может находиться вне открытого интервала $(-1,1)$. Не нарушая общности, можно считать, что x_0 имеет максимальное по абсолютной величине значение среди всех нулей, т.е.

$$|x_0| \geqslant |x_k| \quad \textit{при} \quad k=1,\ldots,n-1.$$

Таким образом, имеет место альтернатива:

$$\textit{либо} \quad |x_k|<1 \quad \textit{при всех} \quad k=0,1,\ldots,n-1;$$
$$\textit{либо} \quad |x_0|\geqslant 1 \quad \textit{и} \quad |x_k|<1 \quad \textit{при} \quad k=1,\ldots,n-1.$$

Легко проверить, что полином $W(x)$ лишь постоянным ненулевым множителем отличается от полинома

$$w(x) := p_{n-1}(x_0)p_n(x) - p_n(x_0)p_{n-1}(x), \quad p_{n-1}(x_0)\neq 0, \tag{34}$$

определенного выше формулой (15). Как говорилось выше (см. утверждение (18) теоремы 1 и замечание 1) в работе [19] было доказано, что система $\{\ell_j\}_{j=0}^{n-1}$ фундаментальных полиномов Лагранжа, соответствующая указанным узлам интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, является ортогональной на отрезке $[-1,1]$ с весом $d\mu(x)$, причем в независимости от того, принадлежит узел x_0 отрезку $[-1,1]$ или нет.

Обозначим через $C := C[-1,1]$ пространство вещественнозначных функций f, непрерывных на $[-1,1]$, с равномерной нормой

$$\|f\|_C := \max\{|f(x)|\colon x\in[-1,1]\}.$$

Через $L^2 := L^2_\mu[-1,1]$ обозначим пространство вещественнозначных функций f, суммируемых с квадратом на отрезке $[-1,1]$ с весом $d\mu(x)$ и нормой

$$\|f\|_{L^2} := \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\, d\mu(x)\right)^{1/2}.$$

Сопоставим набору различных вещественных чисел $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ интерполяционный проектор Лагранжа, действующий из C в $\mathcal{P}_{n-1}$ по формуле

$$\mathcal{L}_{n-1}f(x) := \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\ell_j(x). \tag{35}$$

Пусть выполнены следующие условия:

узлы интерполяции $\xi_0,\ldots,\xi_{n-1}$ *совпадают с* $x_0,\ldots,x_{n-1}$ *— нулями полинома* W, *заданного формулой* (33), (36)

и лежат на отрезке $[-1,1]$. (37)

При таких условиях имеет место следующее неравенство Эрдеша–Турана [19]:

$$\|f-\mathcal{L}_{n-1}f\|_{L^2} \leqslant \left\{6\int_{-1}^{1} d\mu(x)\right\}^{1/2} E_{n-1}(f)_C \tag{38}$$

между $\|f-\mathcal{L}_{n-1}f\|_{L^2}$ — взвешенным L^2-уклонением полинома Лагранжа $\mathcal{L}_{n-1}f$ от функции $f\in C$ и величиной

$$E_{n-1}(f)_C := \min\{\|f-p\|_C\colon p\in\mathcal{P}_{n-1}\}$$

ее наилучшего равномерного приближения пространством $\mathcal{P}_{n-1}$.

На самом деле, в [19] было получено неравенство (38) при условии (37), а вместо условия (36) используется более общее условие. Об этом мы расскажем позднее.

Сейчас ограничимся рассмотрением указанного неравенства лишь при одном условии (36), без ограничения (37). В этом случае доказательство неравенства (38) может быть сокращено, причем с улучшением константы. А именно, при условии (36) справедливо неравенство

$$\|f-\mathcal{L}_{n-1}f\|_{L^2} \leqslant 2\left\{\int\limits_{-1}^{1} d\mu(x)\right\}^{1/2} E_{n-1}(f)_C, \quad f\in C, \tag{39}$$

в котором уклонение $\|f-\mathcal{L}_{n-1}f\|_{L^2}$ имеет тот же смысл что и в (38) при выполнении условия (37); если же это условие не выполняется, т.е. максимальный по модулю узел x_0 расположен вне отрезка ортогональности $[-1,1]$, то полагаем [1]

$$f(x_0) := g(x_0), \tag{40}$$

где $g\in\mathcal{P}_{n-1}$ есть полином наилучшего равномерного приближения функции f на отрезке $[-1,1]$.

Перейдем к доказательству неравенства (39). Введем обозначения

$$\tau_j(x) := \frac{1}{c_j}\ell_j(x), \quad \text{где} \quad c_j := \|\ell_j\|_{L^2} \quad \text{при} \quad j=0,\dots,n-1. \tag{41}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\Big\|f-\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\ell_j\Big\|_{L^2} &\leqslant \Big\|f-\sum_{j=0}^{n-1} g(x_j)\ell_j\Big\|_{L^2} + \Big\|\sum_{j=0}^{n-1}(f(x_j)-g(x_j))\ell_j\Big\|_{L^2} = \\ &= \|f-g\|_{L^2} + \Big\|\sum_{j=0}^{n-1}(f(x_j)-g(x_j))\ell_j\Big\|_{L^2} \leqslant \\ \leqslant \{E_{n-1}(f)_C + E_{n-1}(f)_C\}\cdot\left\{\int\limits_{-1}^{1} d\mu(x)\right\}^{1/2} &= 2E_{n-1}(f)_C\cdot\left\{\int\limits_{-1}^{1} d\mu(x)\right\}^{1/2}.\end{aligned} \tag{42}$$

Здесь было использовано следующее свойство проектора Лагранжа (35)

$$\mathcal{L}_{n-1}q(x) = q(x), \quad q\in\mathcal{P}_{n-1},$$

в частности,

$$\mathcal{L}_{n-1}g(x) = g(x), \quad \mathcal{L}_{n-1}1 = 1;$$

применялись также следующие соотношения:

$$\left\{\int\limits_{-1}^{1} d\mu(x)\right\}^{1/2} = \|1\|_{L^2} = \Big\|\sum_{j=0}^{n-1}\ell_j\Big\|_{L^2} = \Big\|\sum_{j=0}^{n-1}c_j\tau_j\Big\|_{L^2} = \left(\sum_{j=0}^{n-1}c_j^2\right)^{1/2}, \tag{43}$$

в которых учтены равенства $\ell_j(x)=c_j\tau_j(x)$ при $j=0,\dots,n-1$ (см. (41)) и ортонормированность системы $\{\tau_j\}_{j=0}^{n-1}$. Таким образом, неравенство (39) доказано.

[1] Поскольку приближаемая функция f определена лишь на отрезке $[-1,1]$, то неясно какой коэффициент надо ставить в правой части формулы (35) перед фундаментальным полиномом Лагранжа, ассоциированным с внешним по отношению к $[-1,1]$ узлом интерполяции x_0. Как будет показано ниже, выбор (40) значения указанного коэффициента является правильным.

Рассмотрим теперь линейную комбинацию из трех подряд идущих ортогональных полиномов

$$W(x) := p_n(x) + \alpha_n p_{n-1}(x) + \beta_n p_{n-2}(x), \quad n \geqslant 2, \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}, \quad \beta_n \leqslant 0. \tag{44}$$

Шохат [16, с. 472–473, результаты (α), (β) и теорема VII] доказал, что указанные в (44) условия на параметры α_n, β_n являются достаточными для того, чтобы у полинома W все корни были различными и вещественными, которые для удобства занумеруем в убывающем порядке $x_0 > x_1 > \ldots > x_{n-1}$. Как доказано в [16], для расположения нулей возможны лишь следующие три ситуации: 1) все корни расположены в открытом интервале $(-1,1)$; 2) только один из корней x_0 или x_{n-1} расположен вне интервала $(-1,1)$ (обозначим его x') а все остальные $n-1$ корня: $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\} \setminus \{x'\}$ лежат в $(-1,1)$; оба корня x_0 и x_{n-1} расположены вне интервала $(-1,1)$, а все остальные $n-2$ корня: $\{x_1, \ldots, x_{n-2}\}$ лежат в $(-1,1)$. Таким образом, в открытом интервале $(-1,1)$ всегда имеется, по крайней мере, $n-2$ нуля, причем вне этого интервала может находиться не более двух корней и, если таких внешних корней ровно два, то они расположены по разные стороны интервала $(-1,1)$.

Используя указанную информацию о нулях полинома W, заданного формулой (44) с параметрами $\alpha_n \in \mathbb{R}$ и $\beta_n \leqslant 0$, можно сформулировать упомянутый выше результат П.Эрдеша и П.Турана в несколько более общем виде, чем в оригинальной работе [19] (т.е. без требования, чтобы все нули полинома W были различными и лежали на отрезке $[-1,1]$). Предварительно договоримся, что в случае наличия внешних по отношению к отрезку $[-1,1]$ корней x_0 и/или x_{n-1} значение функции f во внешней точке полагаем равным значению в этой же точке полинома $g \in \mathcal{P}_{n-1}$ наилучшего равномерного приближения функции f на $[-1,1]$, т.е. полагаем

$$f(x_{n-1}) := g(x_{n-1}), \quad \text{если} \quad x_{n-1} < -1; \quad \text{и} \quad f(x_0) := g(x_0), \quad \text{если} \quad x_0 > 1. \tag{45}$$

С аналогичной ситуацией мы уже сталкивались выше (см. определение (40) и соответствующую сноску).

Теорема C. *Пусть $n \geqslant 2$; $x_0 > x_1 > \ldots > x_{n-1}$ — нули полинома W, заданного формулой (44) с параметрами $\alpha_n \in \mathbb{R}$ и $\beta_n \leqslant 0$. Тогда для любой функции $f \in C$ выполняется неравенство*

$$\|f - \mathcal{L}_{n-1} f\|_{L^2} \leqslant \left\{ 6 \int_{-1}^{1} d\mu(x) \right\}^{1/2} E_{n-1}(f)_C. \tag{46}$$

Для полноты изложения приведем доказательство теоремы C, применяя в основном рассуждения работы [19], а также некоторые рассуждения Л.Фейера [20] (см. также [3, с. 457–479]), используемые им при доказательстве неотрицательности коэффициентов квадратурной формулы с узлами в нулях полинома W в случае веса $d\mu(x) = dx$ с носителем $[-1,1]$.

Доказательство теоремы C. По определению старшие коэффициенты ортонормированных полиномов p_k положительные. Поэтому старший коэффициент полинома W положительный. Эти свойства коэффициентов будут часто применяться ниже явно или неявно.

Известны также следующие свойства:

$$\ell_j(x) = \frac{W(x)}{W'(x_j)(x - x_j)}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1; \quad \sum_{j=0}^{n-1} \ell_j(x) \equiv 1; \tag{47}$$

$$\mathcal{L}_{n-1} p(x) = p(x), \quad p \in \mathcal{P}_{n-1}. \tag{48}$$

Докажем, что справедливы неравенства [1]

$$\int_{-1}^{1} \ell_j(x)\,d\mu(x) > 0 \quad \text{при} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1; \tag{49}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \int_{-1}^{1} \ell_j^2(x)\,d\mu(x) \leqslant \int_{-1}^{1} d\mu(x). \tag{50}$$

Как отмечается в [19], эти неравенства в случае $d\mu(x) = dx$ с носителем $[-1, 1]$ были доказаны в [20] (см. также [3, с. 472]).

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^{1} \left[\ell_j^2(x) - \ell_j(x)\right] d\mu(x).$$

Подинтегральное выражение есть полином $\ell_j^2(x) - \ell_j(x)$, степени $2n-2$, причем этот полином обращается в нуль во всех точках $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Следовательно,

$$\ell_j^2(x) - \ell_j(x) = W(x)F(x),$$

где $F(x)$ есть полином степени $n-2$, его разложение по ортогональным полиномам p_k имеет вид

$$F(x) = c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + \ldots + c_{n-2}p_{n-2}(x).$$

Таким образом, с учетом (44) имеем

$$\ell_j^2(x) - \ell_j(x) = W(x)F(x) =$$

$$= [p_n(x) + \alpha_np_{n-1}(x) + \beta_np_{n-2}(x)][c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + \ldots + c_{n-2}p_{n-2}(x)].$$

Отсюда видно, что $c_{n-2} > 0$. Интегрируя первую и последнюю части этой цепочки равенств с весом $d\mu(x)$ по отрезку $[-1, 1]$ и учитывая свойство ортонормированности системы полиномов p_k, получаем

$$\int_{-1}^{1} \left[\ell_j^2(x) - \ell_j(x)\right] d\mu(x) = c_{n-2}\beta_n \leqslant 0.$$

Поэтому

$$\int_{-1}^{1} \ell_j^2(x)\,d\mu(x) \leqslant \int_{-1}^{1} \ell_j(x)\,d\mu(x). \tag{51}$$

Отсюда следует утверждение (49). Суммируя обе части неравенства (51) по $j = 0, 1, \ldots, n-1$, с учетом последнего тождества в (47), получим неравенство (50).

Докажем теперь неравенство [2]

$$\sum_{0\leqslant j,\, k\leqslant n-1} \left| \int_{-1}^{1} \ell_j(x)\ell_k(x)\,d\mu(x) \right| \leqslant 2\sum_{j=0}^{n-1} \int_{-1}^{1} \ell_j^2(x)\,d\mu(x). \tag{52}$$

---

[1] Несложно понять, что в «ортогональном» случае, т.е. при $\beta_n = 0$, в (50) знак неравенства можно заменить на знак равенства.

[2] В случае, когда система $\{\ell_j\}_{j=0}^{n-1}$ ортогональная, неравенство (52) очевидно, причем в этом случае множитель 2 в его правой части можно заменить на 1 и знак $\leqslant$ можно заменить на знак $=$.

Неравенство (52) легче воспринимать, если сформулировать его в виде следующего утверждения: *сумма модулей всех элементов матрицы Грама*

$$\begin{pmatrix} \langle \ell_0, \ell_0 \rangle_\mu & \langle \ell_0, \ell_1 \rangle_\mu & \dots & \langle \ell_0, \ell_{n-1} \rangle_\mu \\ \langle \ell_1, \ell_0 \rangle_\mu & \langle \ell_1, \ell_1 \rangle_\mu & \dots & \langle \ell_1, \ell_{n-1} \rangle_\mu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle \ell_{n-1}, \ell_0 \rangle_\mu & \langle \ell_{n-1}, \ell_1 \rangle_\mu & \dots & \langle \ell_{n-1}, \ell_{n-1} \rangle_\mu \end{pmatrix}$$

не превосходит удвоенной суммы ее диагональных элементов.

Сначала заметим, что каждый недиагональный элемент матрицы Грама

$$I_{j,k} := \langle \ell_j, \ell_k \rangle_\mu = \int\limits_{-1}^{1} \ell_j(x)\ell_k(x)\,d\mu(x) \tag{53}$$

удовлетворяет неравенству

$$(-1)^{j+k+1} I_{j,k} \geqslant 0, \quad 1 \leqslant j \neq k \leqslant n-1. \tag{54}$$

Действительно, из первого равенства в (47) следует, что

$$I_{j,k} = \frac{1}{W'(x_j)W'(x_k)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{W(x)}{(x-x_j)(x-x_k)} W(x)\,d\mu(x)$$

При $j \neq k$ имеем

$$\frac{W(x)}{(x-x_j)(x-x_k)} = d_0 p_0(x) + d_1 p_1(x) + \ldots + d_{n-2} p_{n-2}(x), \quad \text{где} \quad d_{n-2} > 0.$$

Из определения (44) полинома W с учетом ортонормированности системы полиномов p_ν, получаем равенство

$$I_{j,k} = \frac{\beta_n}{W'(x_j)W'(x_k)}, \tag{55}$$

которое влечет (54), поскольку $\beta_n \leqslant 0$ и $\operatorname{sign}[W'(x_j)W'(x_k)] = (-1)^{j+k}$.

Таким образом, имеем

$$\sum_{0 \leqslant j,\, k \leqslant n-1} \left| \int\limits_{-1}^{1} \ell_j(x)\ell_k(x)\,d\mu(x) \right| = \sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_{-1}^{1} \ell_j^2(x)\,d\mu(x) - \sum_{0 \leqslant j \neq k \leqslant n-1} (-1)^{j+k} \int\limits_{-1}^{1} \ell_j(x)\ell_k(x)\,d\mu(x) =$$

$$= 2\sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_{-1}^{1} \ell_j^2(x)\,d\mu(x) - \int\limits_{-1}^{1} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \ell_j(x) \right\}^2 d\mu(x) \leqslant 2\sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_{-1}^{1} \ell_j^2(x)\,d\mu(x).$$

Неравенство (52) доказано.

Возьмем теперь произвольную функцию $f \in C$. Пусть $g \in \mathcal{P}_{n-1}$ есть полином наилучшего равномерного приближения функции f, т.е. для разности

$$\varphi(x) := f(x) - g(x) \quad \text{имеем} \quad E_{n-1}(f)_C = \|f-g\|_C = \|\varphi\|_C.$$

Положим

$$I_n := \|f - \mathcal{L}_{n-1} f\|_{L^2}^2 = \int\limits_{-1}^{1} \{f(x) - \mathcal{L}_{n-1} f(x)\}^2\, d\mu(x).$$

Тогда из (48) получаем

$$I_n = \|\varphi - \mathcal{L}_{n-1}\varphi\|^2_{L^2} = \int\limits_{-1}^{1} \{\varphi(x) - \mathcal{L}_{n-1}\varphi(x)\}^2 \, d\mu(x) \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{-1}^{1} \varphi^2(x)\, d\mu(x) + 2\int\limits_{-1}^{1} \{\mathcal{L}_{n-1}\varphi(x)\}^2 \, d\mu(x) = I'_n + I''_n. \tag{56}$$

Очевидно, что

$$I'_n := 2\int\limits_{-1}^{1} \varphi^2(x)\, d\mu(x) \leqslant 2E^2_{n-1}(f)_C \int\limits_{-1}^{1} d\mu(x) \tag{57}$$

Далее из (35), (52) и (50) следуют неравенства

$$|I''_n| = \left| \sum_{0\leqslant j,\, k\leqslant n-1} \varphi(x_j)\varphi(x_k) \int\limits_{-1}^{1} \ell_j(x)\ell_k(x)\, d\mu(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2E^2_{n-1}(f)_C \sum_{0\leqslant j,\, k\leqslant n-1} \left| \int\limits_{-1}^{1} \ell_j(x)\ell_k(x)\, d\mu(x) \right| \leqslant 4E^2_{n-1}(f)_C \int\limits_{-1}^{1} d\mu(x).$$

Отсюда с помощью (57) и (56) приходим к неравенству

$$I_n \leqslant 6E^2_{n-1}(f)_C \int\limits_{-1}^{1} d\mu(x),$$

которое эквивалентно неравенству (46). Теорема C доказана.

4. Интерполяционно-ортогональный базис в пространстве косинус-полиномов. Пусть C_{n-1} есть пространство вещественнозначных косинусов-полиномов $g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cos kt, \quad c_k \in \mathbb{R}$ степени не выше $n-1$.

Важным для приложения к косинус-полиномам являются результаты пункта 2 в случае когда носитель веса $d\mu(x)$ содержится в отрезке $[-1,1]$. Поскольку замена $x = \cos t$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между пространствами $\mathcal{P}_{n-1}$ и C_{n-1}. Однако, в тригонометрическом случае добавляется дополнительное условие, которое в терминах алгебраических полиномов означает более сильное условие на точку $x_0 \in [-1,1]$, чем условие $p_{n-1}(x_0) \neq 0$ теоремы 1, т.к. нужно следить еще и за тем, что бы все нули полинома $w(x)$ (см. формулу (15)) лежали на отрезке $[-1,1]$. Соответствующее необходимое и достаточное условие содержится в теореме 3.3.4 из [9, с. 59].

Продемонстрируем предложенную выше схему применения результатов предыдущего пункта лишь в одном важном частном случае чебышевского веса

$$d\mu(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{с носителем} \quad [-1,1]. \tag{58}$$

Соответствующую квадратурную формулу наивысшей алгебраической степени точности исследовали Мелер [21] в случае, когда все узлы являются свободными, и А.А.Марков [22] в случае, когда все узлы являются свободными, кроме одного, который размещен в одной из концевых точек отрезка $[-1,1]$.

Перейдем к изучению базиса в пространстве C_{n-1}, который является одновременно интерполяционным и ортогональным на $[0,\pi]$ с единичным весом. Напомним (см. формулу (4) выше), что полином

$$\mathfrak{D}_{n-1}(t) := \sum_{|k|\leqslant n-1} e^{ikt} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\cos kt = \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$$

называется ядром Дирихле степени $n-1$. Следующий полином:

$$\mathcal{R}_{n-1}(h,t) := \frac{\mathfrak{D}_{n-1}(t+h)+\mathfrak{D}_{n-1}(t-h)}{2} = 1+2\sum_{j=1}^{n-1}\cos jh\cos jt =$$
$$\frac{\cos(n-1)h\cos nt - \cos nh\cos(n-1)t}{\cos t - \cos h} \tag{59}$$

называется *полиномом Рогозинского* степени $n-1$ с параметром $h\in\mathbb{R}$. Этот полином, фактически, появился в исследованиях Рогозинского [23], посвященных методу суммирования, ядром которого является полином (59).

Полином $\mathcal{R}_{n-1}(h,t)$ представляет собой обобщенный сдвиг ядра Дирихле с шагом h. После замены $h=\arccos y$, $t=\arccos x$, полином $\mathcal{R}_{n-1}(h,t)$ превращается в алгебраический полином, который является важным частным случаем ядра Кристоффеля–Дарбу (см., например, [24, с. 38]), соответствующему чебышевскому весу $d\mu(x)$, определенному формулой (58).

Заданной паре чисел $n\in\mathbb{N}$ и $t_0\in[0,\pi]$ сопоставим полином

$$r(t) := \cos(n-1)t_0\cos nt - \cos nt_0\cos(n-1)t. \tag{60}$$

Замена $x_0=\cos t_0$, $x=\cos t$ преобразует алгебраический полином $w(x)$, определенный выше формулой (15) и соответствующий чебышевскому весу (58), в косинус-полином $r(t)$. Применив теорему 3.3.4 из [9, с. 59], получим необходимое и достаточное условие на расположение точки $t_0\in[0,\pi]$, обеспечивающее существование n различных нулей на $[0,\pi]$ у полинома $r(t)$.

Теорема 2. *Пусть $n\in\mathbb{N}$ и $t_0\in[0,\pi]$. Следующее условие:*

$$\left|\frac{\cos nt_0}{\cos(n-1)t_0}\right| \leqslant 1 \tag{61}$$

является необходимым и достаточным для того чтобы полином $r(t)$, определенный формулой (60), имел на $[0,\pi]$ ровно n различных нулей $t_0,t_1,\dots,t_{n-1}$. Кроме того, если отношение $\dfrac{\cos nt_0}{\cos(n-1)t_0}$ равно 1 или -1, то один из указанных нулей совпадает с 0 или π соответственно.

Для полноты изложения приведем доказательство теоремы 2. Случай $n=1$ тривиален. Рассмотрим случай $n\geqslant 3$ (случай $n=2$ исследуется аналогично). Определим набор точек

$$\eta_0=0,\quad \eta_k=\frac{(2k-1)\pi}{2(n-1)}\quad \text{при}\quad k=1,2,\dots,n-1,\quad \eta_n=\pi.$$

На каждом интервале (η_{k-1},η_k), $k=1,2,\dots,n$ функция

$$\varphi(t) := \frac{\cos nt}{\cos(n-1)t}$$

является непрерывной и строго убывающей. Причем на первом полуинтервале $[\eta_0,\eta_1)$ она меняется от 1 до $-\infty$, на каждом промежуточном интервале (η_{k-1},η_k), где $k=2,\dots,n-$ -1, функция $\varphi(t)$ меняется от $+\infty$ до $-\infty$, а на последнем полуинтервале $(\eta_{\text{т}-1},\eta_n]$ она изменяется от $+\infty$ до -1. Этой информации достаточно не только для доказательства теоремы 2, но и для локализации нулей косинус-полинома $r(t)$.

Следствие 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $0 \leqslant t_0 \leqslant \frac{\pi}{2n-1}$. Тогда полином Рогозинского $\mathcal{R}_{n-1}(t_0, t)$ степени $n-1$ с параметром $h = t_0$ (см. формулу (59)), имеет на $[0,\pi]$ ровно $n-1$ нулей $t_1, \dots, t_{n-1}$. Кроме того, если $t_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2n-1}\right)$, то все эти нули расположены в открытом интервале (t_0, π); а если $t_0 = \frac{\pi}{2n-1}$, то они расположены в полуинтервале $(t_0, \pi]$, при этом наибольший из нулей равен π.*

Доказательство теоремы 2 и следствия 1 можно провести и другим способом. Продемонстрируем его на примере доказательства следствия 1, которое приведено ниже. Однако, следует отметить, что способ доказательства теоремы 2, приведенный выше, является более информативным. В частности, из него видно, что нули $t_j = t_j(t_0)$ при $j = 1, \dots, n-1$ являются строго возрастающими функциями параметра t_0 на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2n-1}\right]$, указанные нули пробегают отрезки $\left[\frac{j\pi}{n-1/2}, \frac{(j+1/2)\pi}{n-1/2}\right]$ соответственно. Таким образом, мера множества всех точек $t_0 \in [0,\pi]$, удовлетворяющих условию (61) теоремы 2, равняется $\frac{n\pi}{2n-1}$.

Доказательство следствия 1. Пусть $t_0 = 0$. Тогда утверждения следствия 1 вытекают из следующей цепочки равенств:

$$\mathcal{R}_{n-1}(t_0, t) = \mathcal{R}_{n-1}(0, t) = \mathfrak{D}_{n-1}(t) = \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right) t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Пусть теперь $t_0 = \mathfrak{h} := \frac{\pi}{2n-1}$. Имеем

$$\cos(n-1)\mathfrak{h} = \sin(\mathfrak{h}/2), \quad \cos n\mathfrak{h} = -\sin(\mathfrak{h}/2).$$

Отсюда с помощью последнего равенства в (59) получаем

$$\mathcal{R}_{n-1}(\mathfrak{h}, t) = \frac{\{\cos nt + \cos(n-1)t\}\sin(\mathfrak{h}/2)}{\cos t - \cos\mathfrak{h}} = \frac{2\cos(n-1/2)t\cos(t/2)\sin(\mathfrak{h}/2)}{\cos t - \cos\mathfrak{h}}.$$

Поэтому утверждения следствия 1 справедливы и в этом случае.

Пусть $0 < t_0 < \frac{\pi}{2n-1}$. Тогда справедливо строгое неравенство

$$|\cos nt_0| < \cos(n-1)t_0.$$

Обозначим через $\xi_k := \frac{k\pi}{n} \in [0,\pi]$, $k = 0, 1, \dots, n$ точки, в которых функция $\cos nt$ попеременно принимает свои максимальные по модулю значения: ± 1. Очевидно, что полином $r(t) = \cos(n-1)t_0 \cos nt - \cos nt_0 \cos(n-1)t$ меняет знак на каждом интервале (ξ_k, ξ_{k+1}), $k = 0, 1, \dots, n-1$. Количество этих интервалов равно n. Следствие 1 доказано.

Предположим, что пара чисел $n \in \mathbb{N}$ и $t_0 \in [0,\pi]$ удовлетворяет условию (61) теоремы 2. Определим следующие косинус-полиномы:

$$r_\nu(t) := \frac{r(t)}{\cos t - \cos t_\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1,$$

где $r(t) = \cos(n-1)t_0 \cos nt - \cos nt_0 \cos(n-1)t$ и $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ — набор всех различных нулей полинома $r(t)$, расположенных на отрезке $[0,\pi]$.

Базисом Дирихле–Рогозинского пространства C_{n-1} назовем систему фундаментальных косинус-полиномов Лагранжа

$$\ell_\nu(t) := \prod_{0 \leqslant j \neq \nu \leqslant n-1} \frac{\cos t - \cos t_j}{\cos t_\nu - \cos t_j} = \frac{r_\nu(t)}{r_\nu(t_\nu)}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \tag{62}$$

соответствующую указанному набору $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ на $[0,\pi]$.

С помощью теоремы 2 и теоремы 1 получаем

Следствие 2. *Пусть числа* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ *и* $t_0 \in [0, \pi]$ *удовлетворяет условию*

$$\left| \frac{\cos nt_0}{\cos (n-1)t_0} \right| \leqslant 1.$$

Тогда система (62) *полиномов* ℓ_j *является одновременно интерполяционной и ортогональной на отрезке* $[0, \pi]$ *с единичным весом, т.е. для каждого косинус-полинома* $f \in C_{n-1}$ *имеет место представление*

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)\ell_j(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

и

$$\int_0^{\pi} \ell_j(t)\ell_k(t)\, dt = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant j \neq k \leqslant n-1.$$

Кроме того, полиномы ℓ_ν *с точностью до постоянного множителя совпадают с полиномами Рогозинского* $\mathcal{R}_{n-1}(t_\nu, t)$, *а именно*

$$\mathcal{R}_{n-1}(t_\nu, t) = A_\nu \ell_\nu(t) \quad \text{при} \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \quad t \in \mathbb{R},$$

где числа A_ν *при всех* $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ *вычисляются по формуле*

$$A_\nu = \mathcal{R}_{n-1}(t_\nu, t_\nu) = \frac{n \sin nt_\nu \cos(n-1)t_\nu - (n-1)\sin(n-1)t_\nu \cos nt_\nu}{\sin t_\nu}.$$

Результаты работы [24] авторов дают основания предполагать, что интерполяционно-ортогональные базисы могут быть использованы в задачах построения полиномов наилучшего приближения некоторых индивидуальных функций (в том числе, разрывных) в интегральной метрике на отрезке (периоде) с весом.

Список литературы

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.
2. *Fejér L.* Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle ein möglichst kleines Maximum bestitzt // Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa, Serie II. 1932. V. 1. P. 263–276.
3. *Fejér L.* Gesammetle Arbeiten. II. Akademiai Kiado, Budapest, 1970.
4. *Бочкарев С.В.* Построение полиномиальных базисов в конечномерных пространствах аналитических в круге функций // Труды МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 49–74.
5. *Котельников В.А.* О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи // Всесоюзный энергетический комитет: Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. 1933.
6. *Shannon C.E.* Communication in the presence of noise // Proc. Institute of Radio Engineers. 1949. V. 37, no. 1. P. 10-21.
7. *Конвей Дж.*, *Слоэн. Н.* Упаковки шаров, решетки и группы. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.
8. *Субботин Ю.Н.*, *Черных Н.И.* Интерполяционно-ортогональные системы всплесков // ДАН. Математика. 2007. Принято в печать.
9. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
10. *Кабатянский Г. А.*, *Левенштейн В. И.* О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Пробл. передачи информ. 1978. Т. 14, вып. 1. С. 3–25.
11. *Schur I.* Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlichvielen Veränderlichen // Journ. für Math. 1911. Bd. 140. S. 1–28.
12. *Полиа Г.*, *Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1, 2. М.: Наука, 1978.
13. *Beardon A.F.*, *Driver K.A.* The zeros of linear combinations of orthogonal polinomials // Journal of Approximation Theory. 2005. V. 137, no. 2. P. 179–186.
14. *Боянов Б.* Оптимальные квадратурные формулы // УМН. 2005. Т. 60, вып. 6. С. 33–52.
15. *Маршал А.*, *Олкин И.* Неравенства: теория мажорации и ее приложения. М.: Мир, 1983.

16. *Schohat J.* On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients // Trans. Amer. Math. Soc., 1937. V. 42. P. 461–496.
17. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматгиз, 1959.
18. *Мысовских И.П.* Интерполяционные кубатурные формулы. Л.; М.: Наука, 1981.
19. *Erdos P.*, *Turan P.* On interpolation. I. Quadrature- and mean-convergence in the Lagrange-interpolation. // Ann. of Math. 1937. V. 38(2), no. 1. P. 142–155.
20. *Fejér L.* Mechaniche Quadraturen mit posoitiven Cotesschen Zahlen // Math. Zeitschrift. 1933. Bd. 37. S. 287–309.
21. *Mehler F.G.* Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen // Journ. für Math. 1864. Bd. 63, S. 152–157.
22. *Markoff A.* Sur la methode de Gauss pour le calcul approche des integrales // Mathem. Annalen, Lpz. 1885. Bd. 25. S. 427–432.
23. *Rogosinski W.* Uber die Abschnitte trigonometrischer Reihen // Mathematische Annalen. 1925. Bd. 95. S. 110–134.
24. *Бабенко А.Г.*, *Крякин Ю.В.* О приближении ступенчатых функций тригонометрическими полиномами в интегральной метрике // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, вып. 1. С. 27–56.