Линейная алгебра + Теория приближений =

Ю.В.Крякин

Фронтовику Юрию Михайловичу Шмандину, в связи с Его 85–летием

1 Введение

Данный текст имеет целью, на примерах, с минимумом формализации прояснить простые связи между тривиальным тождеством

$$E = A^{-1}A \tag{1}$$

и основными теоремами теории приближений: теоремой Фавара, теоремой Джексона–Стечкина и теоремой Уитни.

Начнем с элементарного примера.

Пример 1.

Рассмотрим в R^2 систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

или

$$Ax = 0$$

Данное уравнение имеет нетривиальное решение J, которое называется ядром оператора A. Оно является линейным пространством размерности 1. Это биссектрисса второго-четвертого координатных углов. Пространство R^2 раскладывается в прямую сумму

$$R^2 = J \oplus J^{\perp}$$

по двум перпендикулярным прямым. Оператор A в R^2 необратим. Однако он обратим в $J^{\perp}$. Таким образом тождество (1) имеет смысл, если мы рассматриваем его на подпространстве $J^{\perp}$. Если считать, что в R^2 задана некоторая норма, то можно определить норму

$$\|A^{-1}\|_{J^{\perp}} := \sup_{x \in J^{\perp}} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|}$$

В нашем примере она легко считается (пусть $\|a\| = \|a\|_{l^2}$) и равна 2^{-1}. Тождество (1), верное на функциях из $J^{\perp}$ дает для $a \in J^{\perp}$

$$\|a\| = \|A^{-1}Aa\| \le 2^{-1}\|Aa\| \tag{1.1}$$

Неравенство (1.1) можно рассматривать как простейшую теорему теории аппроксимации, причем, в (1.1) на самом то деле стоит равенство для всех $a \in J^{\perp}$. Норма a это просто длина вектора a лежащего на прямой $x = y$. Это и есть наилучшее приближение вектора a подпространством J.

2 Задачи аппроксимации

Исторически первой задачей, из которой вышла теория аппроксимации, является теорема Вейерштрасса (1885) [1] о том, что любую непрерывную функцию на отрезке (или на периоде) можно равномерно приблизить многочленами (тригонометрическими многочленами). В такой постановке задача 100 лет назад привлекала внимание хороших аналитиков и была, по словам В.А. Стеклова (1922), одной из центральных задач анализа тех времен. Доказательства Вейерштрасса, Лебега (1898) [2], Миттаг–Лефлера, Ландау, Валле-Пуссена, Фейера, Бернштейна и наконец, Джексона использовали две основных идеи - коротко назовем их **В** и **Л** – (Вейерштрасса и Лебега). Так, например теорема Джексона (прямая оценка теории приближений) это **В** , а вот теорема Стоуна [3, 4] (1937, 1948, абстрактный Вейерштрасс) – это **Л**. Как то осталось не очень замеченным доказательство Стеклова [5], которое он привел в своей книге 1922 года, а остались только его функции, функции Стеклова, которые он использовал для доказательства (очень простого и универсального ([5], стр. 38)) теоремы Вейерштрасса. Так что было еще **С** -доказательство.

Вопрос, который стимулировал теорию аппроксимации в это время, задал Валле-Пуссен — как приближается $|x|$ алгебраическими многочленами? Этот вопрос привел и к теореме Джексона (1911) [6], ученика Ландау, так и к теореме Бернштейна [7] (обратная теорема, 1911).

Никакой линейной алгебры, вроде и не было, по крайней мере это могло так показаться.

Однако, в 1936 году Фавар [8] опубликовал обобщение неравенства Бора [9] на производные высших порядков, которое драматическим образом изменило ситуацию – драматическим, в смысле, что значение работы Фавара было не сразу оценено. Более того, появилась работа Колмогорова [10] 1939 года про неравенство между производными (которые его занимали с 1928 года). Хотя Колмогоров и ссылается на свои экстремали, как на функции *которые рассматривались ранее Ахиезером и Крейном* — это ссылка имеет странный запах, так сказать – то, что сделали Ахиезер и Крейн, это почти ничего, это "почти ничего" независимо опубликовал и Фавар.

Мне кажется, что современная (и очень простая) теория аппроксимации началась именно с работы Фавара. Теорема этой работа и есть наш

Пример 2.

Перепишем (1) для операторов дифференцирования

$$E = D^{-k} D^k \tag{2}$$

Удобным пространством (компактная группа) оказался одномерный тор ($T = R/2\pi Z$). На этом пространстве $C^k(T)$, ядром оператора k–дифференцирования

D^k является одномерное подпространство постоянных функций $J = T_0$. Разложение

$$C^k(T) = J \oplus J^\perp \quad (J^\perp = T_0^\perp)$$

позволяет обратить (см. пример 1) оператор дифференцирования на $J^\perp$. Формула обращения (2) есть ни что иное, как формула Эйлера–Маклорена, примененная к T:

$$g = (B_k * D^k)g = \int_T g^{(k)}(x-t)B_k(t)\,dt, \qquad g \in C^k(T_0^\perp) \tag{2.1}$$

Здесь B_k— периодизированные многочлены Бернулли.

Можно написать и так:

$$E = D^{-k}D^k = B_k * D^k \tag{2.2}$$

с тем же смыслом.

Теперь, если мы рассмотрим более узкое пространство $T_n^\perp \subset T_0^\perp$, функций ортогональных линейной оболочке $e_j := e^{ijt}, j = -(n-1), \dots, n-1$, то нетрудно получить знаменитое неравенство Фавара:

Для $g \in C^k(T_n^\perp)$ $((g,\tau) = 0, \quad \tau \subset T_n)$

$$\|g\| = \|g^{(k)} * B_k\| = \|g^{(k)} * (B_k - \tau)\| \le \inf_{\tau \in T_n} \|B_k - \tau\|_1 \|g^{(k)}\| =$$
$$\|D^{-k}\|_{T_n^\perp} \|D^k g\| = \mathcal{K}_k n^{-k} \|D^k g\|$$

Неравенство Фавара–Ахиезера–Крейна, доказывается точно так же:

$$E_n(f) \le \mathcal{K}_k n^{-k} \|D^k g\|$$

Однако тут есть один момент, один естественный вопрос. А разве это неравенство дает нам теорему Вейерштрасса?

Ответ — нет, не дает. Однако подход дает не только теорему Вейерштрасса, и теорему Джексона (1911), но и теорему Стечкина [11] (1951). И мне несколько непонятно, почему это было замечено только недавно. Собственно, я могу объяснить, почему это не было замечено мной ранее. Очень просто. Я слишком доверял книжкам по теории аппроксимации, которые написаны под влиянием авторитетов и упирали на невидение авторитетами весьма очевидных вещей. Что значит, — эти книги писались людьми, весьма далекими от методов (линейной!) алгебры. А Вейль отмечал удивительную нечувствительность многих аналитиков к алгебраическому взрыву прошедшего столетия. Он был прав, по-моему.

Пример 3.

Это теорема Джексона–Стечкина. Она доказывается несколько трудней, нежели неравенство Фавара, но так же, в принципе.

Напишем тождество, оставаясь в рамках примера 2, на тех же пространствах.

$$E = \Delta^{-k}\Delta^k \tag{3}$$

Здесь Δ это разностный оператор. В работе [12] оценена норма Δ^{-k} на $T_n^\perp$, что позволило получить асимптотически точное (по порядку k) неравенство Джексона–Стечкина. Для $k = 1$ точный результат методом **Л–С** был получен Корнейчуком [13]. И результат Корнейчука (точное неравенство Джексона) и результат Стечкина [11], очевидным образом влекут теорему Вейерштрасса.

Технические трудности (небольшие) были связаны с выбором вида операторов Δ^{-k}, и тут оказалась полезна аналогия с другим результатом, который был получен ранее, с теоремой Уитни.

Теорема Уитни [14] является разностным аналогом формулы Тейлора–Маклорена (что собственно, хорошо понимал сам Уитни). Однако выбор ортогонального подпространства $J^\perp$, дающего на сегодняшний день лучшие оценки норм обратного оператора, пришел не сразу.

Прежде, чем переходить к теореме Уитни, рассмотрим задачу для производных (формулу Тейлора–Маклорена).

Пример 4.

Существенная разница в том, что рассматриваются функции на отрезке $I = [0, 1]$ (вообще говоря, нормировка отрезка выбрана для простоты). Тождество (2)

$$E = D^{-k}D^k$$

имеет смысл для более узкого класса функций. Это связано с тем, что ядром оператора дифференцирования является пространство алгебраических полиномов. Выбор подпространства $J^\perp$ на котором справедливо (2) обусловлен видом формулы Тейлора–Маклорена. Это пространство $C^k \bigcap \{f : f^j(0) = 0, j = 0, \ldots, k-1\}$. В алгебраических терминах это идеал в пространстве C^k. Для $g \in J^\perp$ формула Тейлора–Маклорена выглядит следующим образом

$$g = (D^{-k}D^k)g = (S_+^{k-1} * D^k)g$$

Функции $S_+^k(x) = x_+^k(x)/k!$ называются усеченными степенями и широко используются в вопросах сплайн–аппроксимации, в частности для построения B–сплайнов.

Оценка

$$\|g\| \le \|D^{-k}\|\|D^k g\| = \frac{1}{k!}\|D^k g\|, \quad g \in J^\perp$$

точна на $g(x) = x^k$ и служит прообразом неравенства Уитни, которое рассматривается в следующем примере.

Пример 5.

На пространстве $C(I)$ мы не можем применить оператор D^k, однако ничего нам не мешает, как в примере 3, стартовать с тождества

$$E = \Delta^{-k}\Delta^k$$

И тут есть один ньюанс, связанный с выбором подпространства $J^\perp$. Уитни, при доказательстве (1957) своей теоремы выбирал наиболее естественное, на первый взгляд $J_*^\perp = C\bigcap\{f : f(j/(k-1)) = 0, j = 0, \dots, k-1\}$. Он, по-существу, доказал, что норма обратного оператора ограничена, однако не получил никакой оценки (асимптотической) для нее. На сегодняшний день лучшие оценки дает выбор

$$J^\perp = C\bigcap\{f : \int_0^{j/k} f = 0,\ j = 1, \dots, k\}$$

Данное подпространство является ортогональным пространству ступенчатых функций, построенных по разбиению j/k. Удобно отождествить его с $R_k^\perp$.

Доказательство того, что $\|\Delta^{-k}\|_{J^\perp} = 1$ является интересной, на мой взгляд, открытой проблемой.

Решение данной проблемы позволит получить первую точную оценку норм обратных разностных операторов высокого порядка в такого рода задачах и подтвердить гипотезу Сендова (1982) об ограниченности констант Уитни единицей [15]. Отметим что данная проблема решена для $k \le 8$ (≤ 12 — неопубликованный результат Желнова)[16, 17, 18]. Заметим также, что доказанная на сегодняшний день оценка

$$\|\Delta^{-k}\|_{J^\perp} \le 2 + 1/e^2$$

или, в эквивалентной, привычной форме

$$\sup_{x\in I}|f(x)| \le (2 + 1/e^2) \sup_{x,x+kh\in I}|\Delta_h^k f(x)|, \quad f \in J^\perp$$

дает неравенство и для подпространства Уитни (интерполяционного) [19]:

$$\|\Delta^{-k}\|_{J_*^\perp} \le 3$$

В заключение уместно сказать, что в случае периода (задача 3) проблема вычисления норм обратного оператора также трудна – не так много известно даже для случая $k = 2$ (для $k = 1$ достаточно полные результаты получены Корнейчуком). В алгебраическом случае (теорема Уитни) удалось доказать, что

$$\|\Delta^{-k}\|_{J^\perp} = 1, \quad k \le 8$$

ps. И еще одно. Кажется достаточно очевидным, что алгебраический подход будет работать в абстрактных ситуациях. В частности для доказательств правильных, на мой взгляд, прямых теорем на S^n (сферах в R^{n+1}) и, более общо, однородных симметричных пространствах типа сферы (их четыре). Отметим, что методом **B** без контроля норм это было сделано Платоновым (1997) [20].

3. Дополнение, 2009

D1. Теорема Фавара с точки зрения анализа Фурье

Вернемся к примеру 2. Посмотрим на представление (2.1) с другой точки зрения. Напишем тождество

$$1 = ij\,(1/ij), \quad i^2 = -1, \quad j \in Z,\ j \neq 0 \tag{d.1}$$

Если рассматривать это тождество с точки зрения мультипликаторов Фурье, то ему, очевидным образом, соответствует

$$\exp(ijx) = (ij\exp(ij\cdot) * \exp(ij\cdot)/(ij))\,(x), \quad j \neq 0 \tag{d.2}$$

Теперь, учитывая простые правила дифференцирования и ортогональность, получаем

$$f(x) = \sum_{j=-\infty,\ j\neq 0}^{\infty} \alpha_j \exp(ijx) =$$

$$\left(\sum_{j=-\infty,\ j\neq 0}^{\infty} ij\,\alpha_j \exp(ij\cdot)\ *\ \sum_{j=-\infty,\ j\neq 0}^{\infty} \exp(ij\cdot)/(ij)\right)(x) =$$

$$(Df * B_1)(x)$$

Интегрирование по частям последнего равенства дает (2.1). Неравенство Фавара это простое следствие (2.1)

D2. Разностное неравенство Фавара с точки зрения анализа Фурье

Ситуация с разностным аналогом теоремы Фавара, так же, как в случае разностного аналога формулы Тейлора (теорема Уитни) – сложней. Напишем сверточное тождество [21]

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \chi_h^{\nu} * (f - \chi_h * f) \tag{d.3}$$

Здесь $\chi_h(x)$– характеристическая функция интервала $(-h/2, h/2)$, нормированная условием $\|\chi_h\|_1 = 1$. Как и ранее предполагаем, что $\widehat{f_0} = 0$. Данное тождество приводит к разностному аналогу неравенства Фавара ($k = 2$) для $g \in T_n^{\perp}$:

$$\|g\| \leq \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} E_n(\chi_h^{\nu})_1\right) \|g - \chi_h * g\| \tag{d.4}$$

Ключевое равенство ($d.3$), которое можно записать и для четных разностей порядка большего 2, есть другая форма следующего простого тождества:

$$1 = (1 - m_j)\left(\frac{1}{1 - m_j}\right) = (1 - m_j)\sum_{\nu=0}^{\infty} m_j^{\nu}, \quad m_j := \widehat{(\chi_h)}_j = \frac{\sin(jh/2)}{jh/2} \tag{d.5}$$

D3. Теорема Уитни. Проблема обращения оператора Δ^k на отрезке

Это последнее дополнение имеет более специализированный и конкретный характер. Положение дел не столь ясно, как в периодическом случае (хотя и там есть много открытых вопросов). Возможно поэтому данное дополнение не столь просто и прозрачно, как предыдущий текст.

Ситуация с обращением разностного оператора на $I = [0,1]$ имеет свою специфику. Прежде всего, в отличие от периодического случая или случая функций на оси, здесь мы имеем в распоряжении не так много разностей. А именно, мы должны использовать только разности, лежащие внутри I. Понятно, что у концов отрезка "плотность"таких разностей меньше, это и приводит к тому, что нормы обратных операторов близки к единице (а не малы, как в периодическом случае, или на оси – там они порядка $\sqrt{k}2^{-k}$ [12])

Кроме того, на сегодняший день не понятно – можно ли использовать анализ Фурье для данной цели, а именно разложения по "прямым" системам Хаара или Уолша?

Опишем, коротко, на каких тождествах основано доказательство, лучших на сегодняшний день, асимптотических оценок констант.

Легко обратить на $J^\perp = R_k^\perp$ несколько иной оператор: $\Delta^k D$. Приведем явную формулу для $f \in J^\perp$, $\ \ F(x) := x^{-1}\int_0^x f(t)$:

$$F(x) = \binom{kx-1}{k}\int_0^1 \Delta^k_{t/k} f(x(1-t))\,dt, \quad x \in I \qquad (d.6)$$

Расширим оператор F на квадрат $I \times I$:

$$F(x,y) := \frac{1}{x-y}\int_y^x f(t)\,dt, \quad F(x,x) := f(x), \quad F(x,0) = F(0,x) = F(x) \quad (d.7)$$

По–существу мы рассматриваем средние Стеклова как функции двух переменных. Теперь, для оценки для всех k: $\|\Delta^{-k}\|_{J^\perp} \le 2 + \exp(-2)$, достаточно рассмотреть конечную разность $F(x,y)$ с узлом $F(x,x) = f(x)$. Например, для $x \in [0, 1/(k+1)]$:

$$\Delta^k_{0,h} F(x,x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} F(x, x+jh), \quad h = (1-x)/k. \qquad (d.8)$$

Выписанная разность, как и все ее слагаемые, кроме первого, оцениваются, в силу $(d.6)$, через конечные разности функции, что и дает, после некоторых вычислений константу $2 + \exp(-2)$.

Технические сложности возникают, когда мы хотим сделать константу еще меньше, в идеале равную единице (меньше единицы ее сделать нельзя,– простой пример дает функция равная нулю во всех точках, кроме одного из концов I). Их удается преодолеть при малых значениях параметра $k \le 8$. Например, для

$k = 2,\ x \in [0, 1/(k+1)]$ нужно рассмотреть две разности:

$$\Delta^2_{x,h} F(x,x), \quad \Delta^2_{x,0} F(0,x). \qquad (d.9)$$

Однако, с увеличением k сложности возрастают и возникает необходимость в деликатном контроле поведения функции у конца отрезка. Некоторого общего подхода, позволяющего понизить асимптотическую константу, имеющиеся доказательства для $k \le 8$ не выявляют.

Список литературы

[1] Weierstrass, K. *Mathemaische Werke,* **3** III (1915) 1–37

[2] Lebesgue, H. *Sur l'approximation des fonctions,* Bull. Sciences Math. **22** (1898) 278-287

[3] Stone, M.H. *The generalized Weirsstrass approximation theorem,* Math. Magazine **21** (1948) 167–184, 237–254

[4] DeVore, R.A. and Lorentz, G.G. *Constructive Approximation,* Springer-Verlag, Berlin, 1993

[5] Стеклов, В.А. *Основные задачи математической физики,* 1922, 1983

[6] Jackson, D. *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktio- nen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung,* Preisschrift und Dissertation, Universitat Gottingen, 1911

[7] Bernstein, S.N. *Sur l'approximation des fonctions continues par des polynomes,* Comptes rendus, **152** (1911) 502–503

[8] Favard, J. *Application de la formule summatoire d'Euler à la démostration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques ou presque–périodiques,* Mat. Tidsskr. **B** (1936) 81-94

[9] Bohr, H. *Ein allgemeiner Satz über die Integration eines trigonometrischen Polynoms*, Prace Matem.-Fiz. **43** (1935) 273–288 (=Collected Mathematical Works II, **C 36**)

[10] Колмогоров, А.Н. *О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале,* Уч. зап. МГУ, Математика, **30** 3 (1939) 3–16

[11] Стечкин, С.Б. *О порядке наилучших приближений непрерывных функций,* Изв. АН СССР, Сер. матем. **15** 3 (1951) 219–242

[12] Foucart S., Kryakin Yu., Shadrin A. *On the exact constant in Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric* // ArXiv:math CA/0612283 (2006) 1–20 (Constructive Approximation, 2009)

[13] Корнейчук, Н.П. *Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций,* Докл. АН СССР **145** (1962) 514-515

[14] Whitney, H. *On the functions with bounded $n-$ differences,* J.Math. Pures Appl. **36** (1957), 67–95

[15] Sendov, Bl. *On the constants of H.Whitney,* C.R.Acad.Bulg. Sci. **35** (1982), 431–434

[16] Kryakin, Yu. *Whitney's Constants and Sendov's Conjectures,* Mathematica Balkanica **16** (2002), 235–247

[17] Zhelnov, O. *Whitney constansts are bounded by* 1 *for* $k = 5, 6, 7,$ East J.Approximation **8** (2002), 1–14

[18] Zhelnov, O. *Whitney's Inequality and its Generalizations,* Ph.D., Kiev (2004), 1–128

[19] Gilewicz, J., Kryakin, Yu., and Shevchuk I. *Boundedness by 3 of Whitney Interpolation Constant,* Journal of Approximation Theory **119** (2002), 271–290

[20] Платонов, С.С. *Приближения на компактных симметрических пространствах ранга 1,* Мат. сборник **188** 5 (1997) 113–130

[21] Babenko, A. G., Kryakin, Yu. V. *On $T^{\perp}_{2n-1}$ spaces.* //ArXiv:0812.2744v1 [math.CA] (2008) 1–13