СОДЕРЖАНИЕ

Том 12. Выпуск 1 Математика

CONTENTS

Volume 12. Number 1 Mathematics

Известия Тульского государственного университета
Серия Математика. Механика. Информатика
2006. Том 12. Выпуск 1. С. 27–56

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.83

А.Г. Бабенко, Ю.В. Крякин

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург,
Mathematical Institute of the Wroclaw University, Wroclaw, Poland

О ПРИБЛИЖЕНИИ СТУПЕНЧАТЫХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКЕ

Аннотация. Обозначим через $\mathcal{X}_h \equiv \mathcal{X}_h^1$ 2π-периодизацию характеристической функции интервала $(-h,h)$, нормированную условием $\|\mathcal{X}_h\|_L = 1$. Положим $\mathcal{X}_h^2(t) = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{X}_{h/2}^1\left(t-\frac{h}{2}\right) - \mathcal{X}_{h/2}^1\left(t+\frac{h}{2}\right)\right\}$. Рассматривается задача наилучшего интегрального приближения функции $\mathcal{X}_h^\nu$ тригонометрическими полиномами степени $\leqslant n-1$. Основным результатом работы является неравенство: $E_{n-1}(\mathcal{X}_h^\mu)_L \leqslant \min\left\{1, \frac{\pi\mu}{2n\,h}\right\}$, $\mu = 1,2$, $h \in (0,\pi]$, которое обращается в равенство для $h_j = \mu(2j-1)\frac{\pi}{2n}$, $\quad j \in [1,(n+1)/\mu) \cap \mathbb{N}$. При указанных h_j построены полиномы наилучшего приближения.

Библ. 35.

Abstract. Babenko A.G., Kryakin Yu.V. On approximation of step functions by trigonometric polynomials in the integral metric // Izvestiya of the Tula State University. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics. Tula: TSU, 2006. V. 12, N 1. P. 27–56.

Denote by $\mathcal{X}_h \equiv \mathcal{X}_h^1$ a 2π-periodization of characteristic function of $(-h,h)$, normalized by $\|\mathcal{X}_h\|_L = 1$. Put $\mathcal{X}_h^2(t) = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{X}_{h/2}^1\left(t-\frac{h}{2}\right) - \mathcal{X}_{h/2}^1\left(t+\frac{h}{2}\right)\right\}$. We consider the problem of the best integral approximation of $\mathcal{X}_h^\mu$ by trigonometric polynomials of degree $\leqslant n-1$. The main result is the following: $E_{n-1}(\mathcal{X}_h^\mu)_L \leqslant \min\left\{1, \frac{\pi\mu}{2n\,h}\right\}$, $\mu = 1,2$, $h \in (0,\pi]$, with equalities for $h_j = \mu(2j-1)\frac{\pi}{2n}$, $j \in [1,(n+1)/\mu) \cap \mathbb{N}$. The polynomials of best approximation have been constructed for these values h_j.

Bibl. 35.

Исследования первого из авторов поддержаны РФФИ (проект № 05-01-00233), Интеграционным проектом фундаментальных научных исследований, выполняемых в УрО РАН совместно с учеными СО РАН, и Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–5120.2006.1). Исследования второго автора поддержаны правительством Польши (грант 201 016 31/1206).

1. Неконструктивный способ оценки величины наилучшего интегрального приближения на периоде двух простейших ступенчатых функций тригонометрическими полиномами

1.1. **История вопроса. Постановка задачи.** Конструктивная теория приближения индивидуальных функций берет свое начало с мемуара П.Л.Чебышева «Теория механизмов, известных под названием параллелограмов», представленного Российской Академии Наук в январе 1853 года (см. [19, с. 611-648]). В этом мемуаре была поставлена [19, §3, с. 615] задача равномерного приближения функции f на отрезке множеством алгебраических полиномов степени n, сформулировано утверждение [19, §3, с. 615] о существовании $(n+2)$-точечного альтернанса и приведено решение указанной задачи, в частности, в случае [19, §5, с. 623, формула (11)], когда $f(x) = x^{n+1}$.

Одним из естественных развитий указанной задачи является аналогичная задача в интегральной метрике. Задача нахождения точного значения величины наилучшего интегрального приближения (на отрезке, на периоде) индивидуальной функции полиномами (алгебраическими, тригонометрическими) исследована далеко не полностью. Первые результаты в этой области получили в 1873 году А.Н. Коркин и Е.И. Золоторев. Они (см. [7, с. 329-349], [1, с. 103]) нашли наилучшее интегральное приближение на отрезке $[-1, 1]$ функции x^n алгебраическими полиномами степени $n-1$. Достаточные условия (близкие к необходимым) полинома наилучшего интегрального приближения непрерывной функции на отрезке получил в 1898 году А.А.Марков [10] (см. [1, с. 96-103, гл. 2, пункт 50]). В 1924 году Джексон [29] (см. [1, гл. 2, п. 49, с. 91-96]) доказал единственность полинома наилучшего интегрального приближения для непрерывной функции. В 1930 году (а возможно и раньше) С.Н.Бернштейн (см. [3, с. 7-10]), доказал что функция $f(t) = \cos(nt)$ не приближается, в частности, в интегральной метрике на периоде $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ тригонометрическими полиномами степени $\leqslant n-1$.

Ж.Фавар [25,26,27] (см. [8, с. 61, теорема 3.5.2, формула (3.36) и комментарии к ней на с. 309]) нашел величину наилучшего интегрального приближения ядра Бернулли натурального порядка тригонометрическим полиномами. Исследования Ж.Фавара дополнили и развили Н.И.Ахиезер, М.Г.Крейн, Б.Надь, С.М.Никольский, В.К.Дзядык, С.Б.Стечкин, Сунь Юн-Шен, А.Пинкус, Т.Х.Нгуен Тхи и другие математики (см. [8, гл. 3, §3.5, с. 61, теорема 3.5.2, формула (3.36) и комментарии к гл. 3, §3.5 на с. 309], [9, гл. 4, §4.1, 4.2 и комментарии к ним на с. 202], [31, 11]. Отметим, что упомянутым выше работам Ж.Фавара предшествовали две работы Г.Бора [22,23] 1935 года и две работы С.Н.Бернштейна (см. [3, с. 170-172]) 1935 и 1936 годов, в которых было получено неравенство между равномерной нормой функции на периоде и L_∞-нормой ее r-й производной на соболевском классе 2π-периодических функций $f \in W^r_{L_\infty}$, ортогональных пространству T_{n-1} тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$, точнее (см. [18, гл. V, п. 5.5.3, с. 304]), Г.Бор рассмотрел случай $r = 1$, $n \in \mathbb{N}$, а С.Н.Бернштейн рассмотрел случай $r = 2, 3, \dots$, $n = 1$.

Данная работа посвящена вопросам, связанным с поиском точных значений величины наилучшего интегрального приближения на периоде следующих простейших ступенчатых функций: характеристической функции интервала $(-h, h)$ и усредненной разности двух характеристических функций интервалов $(0, h)$, $(-h, 0)$, т.е. функции Хаара с носителем $(-h, h)$, тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$. Здесь предполагается, что $0 < h \leqslant \pi$, если иное не оговорено особо.

Отметим еще, что при $h = \pi$ величина наилучшего интегрального приближения на периоде характеристической функции интервала $(-\pi, \pi)$ пространством T_{n-1}, очевидно, равна нулю, в то время как для функции Хаара с носителем $(-\pi, \pi)$ соответствующая величина отлична от нуля и задача вычисления этой величины, как нетрудно заметить, сводится к приближению характеристической функции интервала $(-\pi/2, \pi/2)$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $0 < h < \pi$, когда речь идет о характеристической функции интервала $(-h, h)$, и $0 < h \leqslant \pi$, если речь идет о функции Хаара с носителем $(-h, h)$.

Одним из стандартных способов применения критерия А.А.Маркова для нахождения тригонометрического полинома наилучшего интегрального приближения функции из L среди всех тригонометрических полиномов степени $\leqslant n-1$ является проверка выполнения для нее, так называемого условия A_n^*, определение которого содержится в [12, с. 226-228], [8, с. 79-81].

Указанные выше ступенчатые функции не удовлетворяют известным нам достаточным условиям, обеспечивающим выполнение условия A_n^*. В частности, потому что они не являются непрерывными ни на одном открытом интервале длиной 2π. Кроме того, в силу (1.1.3), они не удовлетворяют известным достаточным условиям Надя (см. [12, с. 239-240]). Указанные функции, вообще говоря, не являются функциями (ядрами) неувеличивающими осцилляцию из класса CVD_{2n}, определение которого содержится в [31, §2, с. 212, определение 2.1], не только из-за того, что они разрывные, но из-за того, что при достаточно больших значениях параметров h и n не выполняется необходимое условие (см. [31, §2, с. 213, теорема 2.2]) на коэффициенты Фурье[1]. Отметим еще, что указанные ступенчатые функции

[1]Например, для характеристической функции интервала $(-h, h)$ нетрудно подобрать параметры n и $h \geqslant \frac{v}{n}$, так чтобы нарушалось указанное необходимое условие на

нельзя представить (в силу разрывности в любом открытом интервале длиной 2π) в виде интегралов от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер, т.е. неприменима схема предложенная в [6]. Тем не менее, оказалось, что при некоторых значениях параметра h, принадлежащих равномерным сеткам (с шагом $\pi/(n+1)$ или π/n), указанные выше ступенчатые функции все таки удовлетворяют условию A_n^*.

Перейдем к подробной формулировке рассматриваемой здесь задачи. Пусть $h > 0$,

$$\chi_h^2(t) := \chi_h^1(t) \cdot \operatorname{sign} t, \qquad \chi_h^1(t) := \begin{cases} \frac{1}{2h}, & 0 \leqslant |t| < h, \\ 0, & h \leqslant |t|. \end{cases}$$

Функция χ_h^1 называется характеристической функцией интервала $(-h, h)$, а χ_h^2 — функцией Хаара с носителем $(-h, h)$. Эти функции нормированы условием

$$\|\chi_h^\mu\|_{L(\mathbb{R})} = 1, \quad \mu = 1, 2.$$

Периодизацию функций $\chi_h^\mu(t)$ с периодом 2π обозначим через $\mathcal{X}_h^\mu(t)$. Здесь применяется известный способ периодизации (см. [15, гл. VII, пункт 2, с. 280, формула (2.1) и теорема 2.4 на с. 281]), а именно функции $f \in L(\mathbb{R})$ поставим в соответствие следующую 2π-периодическую функцию F из $L(\mathbb{T})$:

$$F(t) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t + 2\pi j). \tag{1.1.1}$$

Отметим несколько свойств функций $\mathcal{X}_h^\mu(t)$. Нормы функций $\mathcal{X}_h^\mu$ в пространстве $L = L(\mathbb{T})$ удовлетворяют соотношениям (см. [15, доказательство теоремы 2.4 на с. 281])

$$\|\mathcal{X}_h^1\|_L = 1 \quad \text{при} \quad h > 0, \tag{1.1.2}$$

$$\|\mathcal{X}_h^2\|_L = 1 \quad \text{при} \quad 0 < h \leqslant \pi, \quad \|\mathcal{X}_h^2\|_L \leqslant 1 \quad \text{при} \quad h > \pi.$$

При любом $h > 0$ ряды Фурье этих функции имеют вид

$$\mathcal{X}_h^1(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kh}{kh} \cos kt\right), \quad \mathcal{X}_h^2(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\sin\frac{kh}{2}\right)^2}{kh} \sin kt, \tag{1.1.3}$$

коэффициенты Фурье (см. [31, §2, с. 213, теорема 2.2]). Здесь $v = 2.553\ldots$ — корень уравнения $g(u) = -g(u_1)$ в открытом интервале $(0, \pi)$, а $u_1 = 4.4934\ldots$ — точка глобального минимума на полуоси $\mathbb{R}_+$ функции $g(u) = \frac{\sin u}{u}$.

в частности, при $h = \pi$ имеют место разложения

$$\mathcal{X}_\pi^1(t) = \frac{1}{2\pi}, \quad \mathcal{X}_\pi^2(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin(2j-1)t}{(2j-1)\pi}.$$

Несмотря на то, что указанный выше способ (1.1.1) периодизации функций $\chi_h^\mu(t)$ с периодом 2π не накладывает никаких ограничений на положительный параметр h, в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая $0 < h \leqslant \pi$.

Отметим еще одно равенство

$$\mathcal{X}_h^2(t) = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{X}_{h/2}^1\left(t-\frac{h}{2}\right) - \mathcal{X}_{h/2}^1\left(t+\frac{h}{2}\right)\right\}, \tag{1.1.4}$$

справедливое при всех $t \in \mathbb{R}$, $h \in (0,\pi]$.

В данной работе рассматривается задача интегрального приближения функций $\mathcal{X}_h^\mu$ пространством T_{n-1} на периоде $\mathbb{T}$, т.е. задача нахождения величин $E_{n-1}(\mathcal{X}_h^\mu)_L$, где

$$E_{n-1}(F)_L = \min\{\|F-\tau\|_L :\ \tau \in T_{n-1}\}$$

— величина наилучшего интегрального приближения функции $F \in L$ пространством T_{n-1} вещественнозначных тригонометрических полиномов

$$\tau(t) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} c_k e^{ikt}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad c_{-k} = \overline{c_k}$$

степени $\leqslant n-1$.

1.2. **Некоторые известные факты из теории аппроксимации.**

1.2.1. *Свойства операторов свертки, конечной разности, дифференцирования и их суперпозиции.* Наряду с пространством $L = L(\mathbb{T})$ мы будем использовать пространство $C = C(\mathbb{T})$ непрерывных 2π-периодических функций $f:\ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|f\|_C = \max\{|f(t)| :\ t \in \mathbb{T}\},$$

а также пространство $L_\infty = L_\infty(\mathbb{T})$ измеримых 2π-периодических существенно ограниченных на $\mathbb{T}$ функций $f:\ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{L_\infty} = \sup\operatorname{vrai}\{|f(t)| :\ t \in \mathbb{T}\}.$$

Ниже мы будем пользоваться (явно или неявно) известным утверждением, что $L_\infty \subset L$.

Функции $f:\ \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$ из L сопоставим ее ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_\nu e^{i\nu t}, \quad \widehat{f}_\nu := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i\nu t}\,dt \in \mathbb{C}, \quad \widehat{f}_{-\nu} = \overline{\widehat{f}_\nu}.$$

Сверткой двух функций f и g из L называется функция

$$(f{*}g)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)g(u)\,du,$$

которая также принадлежит L и обладает свойством (см. [20, гл. 3, §3.1, с. 65-66])

$$\widehat{(f{*}g)}_\nu = \widehat{f}_\nu \cdot \widehat{g}_\nu \quad \text{для всех} \quad \nu \in \mathbb{Z}. \tag{1.2.1}$$

Обозначим символом D оператор дифференцирования

$$Dg(t) := g'(t).$$

Функцией Стеклова для функции $f \in L$ называется следующая функция (см. [8, гл. 5, §5.2, с. 98-101]):

$$f_h(t) := \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(t+v)\,dv = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(t-u)\,du, \quad h > 0.$$

Для этой функции справедливы следующие представления:

$$f_h(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} f(u)\,du = (2\pi f{*}\mathcal{X}_h^1)(t) \quad \text{при} \quad 0 < h \leqslant \pi.$$

Отсюда видно, что f_h абсолютно непрерывна и почти всюду выполняются соотношения

$$Df_h(t) = D(2\pi f{*}\mathcal{X}_h^1)(t) = \frac{1}{2h}\Big\{f(t+h) - f(t-h)\Big\},$$

из которых следует неравенство

$$\|D(2\pi f{*}\mathcal{X}_h^1)\|_{L_\infty} \leqslant \frac{1}{h}\|f\|_{L_\infty}, \quad f \in L_\infty. \tag{1.2.2}$$

Аналогично выводятся соотношения

$$\begin{aligned}
f_{h/2}\left(t - \frac{h}{2}\right) &= \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} f(u)\,du = \left(2\pi f{*}\mathcal{X}_{h/2}^1\left(\cdot - \frac{h}{2}\right)\right)(t),\\
f_{h/2}\left(t + \frac{h}{2}\right) &= \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} f(u)\,du = \left(2\pi f{*}\mathcal{X}_{h/2}^1\left(\cdot + \frac{h}{2}\right)\right)(t),\\
Df_{h/2}\left(t - \frac{h}{2}\right) &= D\left(2\pi f{*}\mathcal{X}_{h/2}^1\left(\cdot - \frac{h}{2}\right)\right)(t) = \frac{1}{h}\Big\{f(t+h) - f(t)\Big\},\\
Df_{h/2}\left(t + \frac{h}{2}\right) &= D\left(2\pi f{*}\mathcal{X}_{h/2}^1\left(\cdot + \frac{h}{2}\right)\right)(t) = \frac{1}{h}\Big\{f(t) - f(t-h)\Big\}.
\end{aligned}$$

Отсюда и (1.1.4) получаем, что для произвольной функции $f \in L$ выполняются равенства

$$D\left(2\pi f * \mathcal{X}_h^2\right)(t) \;=\; \frac{1}{2}\left\{D\left(2\pi f * \left[\mathcal{X}_{h/2}^1\left(\cdot - \frac{h}{2}\right) - \mathcal{X}_{h/2}^1\left(\cdot + \frac{h}{2}\right)\right]\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2h}\Big\{f(t+h) - 2f(t) + f(t-h)\Big\}$$

почти для всех $t \in \mathbb{T}$. Из этих равенств и вложения $L_\infty \subset L$ следует неравенство

$$\|D\left(2\pi f * \mathcal{X}_h^2\right)\|_{L_\infty} \leqslant \frac{2}{h}\|f\|_{L_\infty}, \quad f \in L_\infty. \tag{1.2.3}$$

1.2.2. *Двойственность. Неравенство Бора–Фавара.* Обозначим через $T_{n-1}^\perp$ множество функций $f \in L$, ортогональных пространству T_{n-1} вещественнозначных тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$.

Напомним известное соотношение двойственности [12, с. 213-214, следствие 2] (см. также [8, с. 42, предложение 2.5.2]) для задачи наилучшего интегрального приближения индивидуальной функции пространством T_{n-1}.

Теорема 1.2.1. *При каждом $n \in \mathbb{N}$ для любой функции $\varphi \in L$ имеем*

$$E_{n-1}(\varphi)_L = \sup_{f \in T_{n-1}^\perp,\, \|f\|_{L_\infty} \leqslant 1} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\varphi(u)\,du, \tag{1.2.4}$$

причем существует функция $f_0 \in T_{n-1}^\perp \bigcap L_\infty$ с единичной нормой $\|f_0\|_{L_\infty} = 1$, на которой достигается точная верхняя грань в правой части этого соотношения.

В силу инвариантности множества $T_{n-1}^\perp \bigcap L_\infty$ и нормы $\|\cdot\|_{L_\infty}$ относительно преобразования $f(u) \mapsto f(-u)$, соотношение (1.2.4) можно переписать в виде

$$E_{n-1}(\varphi)_L = \sup_{f \in T_{n-1}^\perp,\, \|f\|_{L_\infty} \leqslant 1} \int_{-\pi}^{\pi} f(-u)\varphi(u)\,du =$$

$$= \sup_{f \in T_{n-1}^\perp,\, \|f\|_{L_\infty} \leqslant 1} \{2\pi f * \varphi\}(0). \tag{1.2.5}$$

Из теоремы 1.2.1 получается следующий критерий элемента наилучшего интегрального приближения (см. [8, гл. 2, §2.4, с. 34-36, теорема 2.4.2]).

Следствие 1.2.1. *Для того чтобы тригонометрический полином $\tau_{n-1} \in T_{n-1}$ доставлял наилучшее интегральное приближение в T_{n-1} функции $\varphi \in L \setminus T_{n-1}$, необходимо и достаточно существование функции $f_0 \in T_{n-1}^\perp \bigcap L_\infty$, удовлетворяющей следующим условиям:*

$$\|f_0\|_{L_\infty} = 1, \quad \|\varphi - \tau_{n-1}\|_L = \int_{-\pi}^{\pi} f_0(u)\varphi(u)\,du.$$

Отсюда можно вывести (см. [8, гл. 3, §3.3, с.55-56, теорема 3.3.2]) критерий элемента наилучшего интегрального приближения, восходящий к А.А.Маркову [10] (см. [1, с. 96-103, гл. 2, пункт 50], [24, Chapter 3, § 10]).

Теорема 1.2.2. *Для того чтобы полином $\tau_{n-1} \in T_{n-1}$ доставлял наилучшее в метрике пространства L приближение функции $\varphi \in L$, достаточно, а в случае, когда множество точек $t \in \mathbb{T}$, в которых $\varphi(t) = \tau_{n-1}(t)$, имеет меру ноль, и необходимо выполнение соотношения*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tau(t) \operatorname{sign}[\varphi(t) - \tau_{n-1}(t)]\, dt = 0 \quad \text{для всех полиномов} \quad \tau \in T_{n-1}.$$

Обзор результатов, относящихся к необходимым и достаточным условиям того что бы полином был полиномом наилучшего интегрального приближения функции из L, содержится в работе [32].

Хорошо известно неравенство Бора–Фавара [22, 23 25, 26, 27] (см. [1, гл. 5, п. 104, с. 251, примечание [36] на с. 400], [18, гл. V, п. 5.5.3 на с. 304 и сноска на этой же странице]), которое удобно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 1.2.3 (Г.Бор, Ж.Фавар). *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, функция $f \in T_{n-1}^{\perp}$, причем сама функция f и все ее подряд идущие производные до порядка $r-1$ включительно*[2] *абсолютно непрерывны, а $f^{(r)}$ принадлежит пространству L_∞. Тогда выполняется неравенство*

$$\|f\|_C \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|f^{(r)}\|_{L_\infty}, \quad \text{где} \quad \mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{(r+1)}}. \tag{1.2.6}$$

Неравенство (1.2.6) *нельзя улучшить.*

Величины $\mathcal{K}_r$, $r = 1, 2, \ldots$ называют константами Фавара; эти константы удовлетворяют следующим соотношениям (см. [8, гл. 3, §3.5, с. 66])

$$\begin{gathered} \mathcal{K}_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \mathcal{K}_2 = \frac{\pi^2}{8}, \quad \mathcal{K}_3 = \frac{\pi^3}{24}, \ldots, \\ 1 < \mathcal{K}_2 < \mathcal{K}_4 \ldots < 4/\pi < \ldots < \mathcal{K}_3 < \mathcal{K}_1 = \pi/2. \end{gathered} \tag{1.2.7}$$

1.3. **Неконструктивный способ оценки величины наилучшего интегрального приближения на периоде пространством T_{n-1} характеристической функции интервала $(-h, h)$ и функции Хаара с носителем $(-h, h)$ при $0 < h \leqslant \pi$.** В данном параграфе применяются факты из теории аппроксимации, приведенные в предыдущем параграфе для получения оценок величины наилучшего интегрального приближения ступенчатых функций $\mathcal{X}_h^\mu$, пространством T_{n-1}. Причем оценки сверху получены при всех $h \in (0, \pi]$ неконструктивным способом, т.е. без предъявления соответствующих приближающих тригонометрических полиномов. Получены также оценки снизу при некоторых достаточно малых h, а также для h,

[2]Здесь мы считаем, что $f^{(0)}(t) = f(t)$.

принадлежащих равномерной сетке (с шагом π/n) на $(0,\pi)$, которые совпадают с оценками сверху.

В дальнейшем нам удобно использовать следующее обозначение:

$$h(\alpha) := h_n(\alpha) := \frac{\pi}{2n}\,\alpha, \quad \alpha > 0. \tag{1.3.1}$$

Теорема 1.3.1. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leqslant 2n$ справедлива оценка*

$$E_{n-1}(\mathcal{X}^1_{h(\alpha)})_L \leqslant \min\left\{1, \frac{1}{\alpha}\right\}. \tag{1.3.2}$$

Оценка (1.3.2) *точна при $0 < \alpha \leqslant 1$, а также при $\alpha = 2j-1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $j \in \mathbb{N}$.*

Замечание 1.3.1. Ниже (см. следствие 2.1.1) найдена величина

$$E_{n-1}(\mathcal{X}^1_{h(\alpha)})_L = \frac{1}{2\ell-1} \quad \text{при} \quad \alpha = \frac{n}{n+1}(2\ell-1), \quad 2 \leqslant \ell \leqslant n+1, \quad \ell \in \mathbb{N}. \tag{1.3.3}$$

Очевидно, что $E_{n-1}(\mathcal{X}^1_\pi)_L = 0$ (случай $\alpha = 2n$). Следовательно при α, указанных в (1.3.3), а также при $\alpha = 2n$, оценка (1.3.2) уже не является точной. Каково наилучшее приближение при других значениях α нам неизвестно.

Доказательство теоремы 1.3.1. Заметим, что из (1.1.2) следует неравенство

$$E_{n-1}(\mathcal{X}^1_h)_L \leqslant 1 \quad \text{при всех} \quad h > 0. \tag{1.3.4}$$

Из теоремы 1.2.1 и (1.2.5) следует, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $h \in (0,\pi]$ существует функция $f_0 \in T^\perp_{n-1} \bigcap L_\infty$ с единичной нормой $\|f_0\|_{L_\infty} = 1$, для которой выполняются равенства

$$E_{n-1}(\mathcal{X}^1_h)_L = \left(2\pi f_0 * \mathcal{X}^1_h\right)(0) = F_h(0), \tag{1.3.5}$$

где

$$F_h(t) := (2\pi f_0 * \mathcal{X}^1_h)(t) \tag{1.3.6}$$

есть абсолютно непрерывная функция, принадлежащая $T^\perp_{n-1}$, в силу свойства (1.2.1). Поэтому из теоремы 1.2.3 Бора–Фавара и неравенства (1.2.2), с учетом определения (1.3.6) и первого равенства в (1.2.7), получаем

$$\|F_h\|_C \leqslant \frac{\mathcal{K}_1}{n}\|DF_h\|_{L_\infty} \leqslant \frac{\mathcal{K}_1}{nh}\|f_0\|_{L_\infty} = \frac{\pi}{2nh}.$$

Отсюда и (1.3.4), (1.3.5), (1.3.1) следует неравенство (1.3.2). Таким образом, первое утверждение теоремы 1.3.1, относящееся к оценке сверху, доказано.

Перейдем к доказательству точности указанной оценки сверху при $0 < \alpha \leqslant 1$, а также при $\alpha = 2j-1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $j \in \mathbb{N}$. Для этого воспользуемся теоремой 1.2.1, из которой следует неравенство

$$E_{n-1}(\mathcal{X}^1_{h(\alpha)})_L \geqslant \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathcal{X}^1_{h(\alpha)}(u)\,du\right|,$$

где f — произвольная функция из множества $T_{n-1}^{\perp}$ с единичной L_∞-нормой. Подставляя в правую часть этого неравенства функцию $f(u) = \operatorname{sign}\cos nu$, которая имеет единичную L_∞-норму и, как известно, принадлежит множеству $T_{n-1}^{\perp}$, получаем искомую оценку снизу, совпадающую при указанных значениях параметра α с оценкой сверху (1.3.2). Таким образом, теорема 1.3.1 доказана полностью.

Следствие 1.3.1. *Тригонометрический полином $\tau_{n-1}(t) \equiv 0$ является полиномом наилучшего интегрального приближения в T_{n-1} функции $\mathcal{X}^1_{h(\alpha)}$ при $0 < \alpha \leqslant 1$, а при $1 < \alpha \leqslant \pi$ — не является.*

Теорема 1.3.2. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leqslant 2n$ справедлива оценка*

$$E_{n-1}(\mathcal{X}^2_{h(\alpha)})_L \leqslant \min\left\{1, \frac{2}{\alpha}\right\}. \tag{1.3.7}$$

Оценка (1.3.7) *точна при* $0 < \alpha \leqslant 2$, *а также при* $\alpha = 2(2j-1)$, $1 \leqslant j \leqslant \frac{n+1}{2}$, $j \in \mathbb{N}$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.3.1. А именно, в первой части доказательства, относящейся к оценке сверху, надо воспользоваться неравенством (1.2.3), а во второй части доказательства, относящейся к оценке снизу, нужно вместо функции $\operatorname{sign}\cos nu$ использовать функцию $\operatorname{sign}\sin nu$.

Замечание 1.3.2. Ниже (см. следствие 2.2.1) найдена величина

$$E_{n-1}(\mathcal{X}^2_{h(\alpha)})_L = \frac{1}{2\ell-1} \quad \text{при} \quad \alpha = \frac{2n}{n+1}(2\ell-1), \quad 2 \leqslant \ell \leqslant \frac{n+2}{2}, \quad \ell \in \mathbb{N}. \tag{1.3.8}$$

А также найдена величина (см. предложения 2.2.1, 2.2.2) $E_{n-1}(\mathcal{X}^2_\pi)$ (случай $\alpha = 2n$) при всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно при α, указанных в (1.3.8), оценка (1.3.7) не является точной. Каково наилучшее приближение при других значениях α нам неизвестно.

2. Конструкции тригонометрических полиномов наилучшего интегрального приближения на периоде для ступенчатых функций $\mathcal{X}^\mu_h$ при некоторых h

В данной главе с помощью критерия А.А.Маркова найдены тригонометрические полиномы из T_{n-1} наилучшего интегрального приближения на периоде для двух простейших ступенчатых функций, а именно для $\mathcal{X}^1_h$ — характеристической функции интервала $(-h, h)$ и для $\mathcal{X}^2_h$ — функции Хаара с носителем $(-h, h)$, периодически продолженных на $\mathbb{R}$ с периодом 2π и нормированных условием $\|\mathcal{X}^\mu_h\|_L = 1$. Здесь параметр h принадлежит пересечению полуинтервала $(0, \pi]$ с некоторой равномерной сеткой, расположение которой зависит от n и вида приближаемой функции. В частности, показано что, если h есть первая точка указанной сетки, то полиномом наилучшего интегрального приближения не является единственным, точнее, соответствующее множество наилучших полиномов содержит в себе однопараметрическое семейство полиномов. Например, в случае приближения характеристической функции симметричного интервала указанное семейство наилучших полиномов содержит нулевой полином и полином $\gamma R_{n-1,1}$, где γ — некоторое положительное число, а $R_{n-1,1}$ — полином Рогозинского степени $n-1$, который здесь называется полином Рогозинского первого типа. В случае когда h есть вторая точка указанной сетки, то полиномом наилучшего интегрального приближения не является единственным среди полиномов степени $\leqslant n-1$, но среди всего множества наилучших полиномов существует полином степени $n-2$, который, вероятно, является единственным. Для предъявления его явной формулы мы вводим, в частности, понятие полинома Рогозинского второго типа (см. ниже определение 2.1.1 полинома Рогозинского произвольного типа $j \in \mathbb{N}$). Аналогичная ситуация имеет место и в случае приближения периодизированной функции Хаара.

2.1. **Интегральное приближение 2π-периодизированной характеристической функции симметричного интервала тригонометрическими полиномами.**

2.1.1. *Вывод формул разложения по косинусам для полиномов Рогозинского первого и второго типа на основе формулы Кристоффеля–Дарбу.*

Определение 2.1.1. Пусть $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $n, j \in \mathbb{N}$. Полином

$$R_{n-j,j}(t) := \frac{\cos nt}{\prod\limits_{\nu=1}^{j}(\cos t - \cos\xi_\nu)}, \quad \xi_\nu = \frac{2\nu-1}{2n}\pi \tag{2.1.1}$$

будем называть полиномом Рогозинского типа j степени $n-j$.

В данном пункте будет предложен способ нахождения коэффициентов в разложении

$$R_{n-j,j}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-j} a_k \cos kt$$

по косинусам полинома Рогозинского $R_{n-j,j}$ типа j при $j = 1, 2$, на основе формулы Кристоффеля–Дарбу.

Хорошо известно, что система функций на $(0, \pi)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \ldots$$

является ортонормированной относительно скалярного произведения

$$(f,g) := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)g(t)\,dt.$$

Поэтому система функций на $(-1,1)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, T_1(x), T_2(x), T_3(x), \ldots,$$

где

$$T_k(x) = \cos(k\arccos x),\ k = 1,2,3,\ldots - \text{ полиномы Чебышева,}$$

будет ортонормированной относительно следующего скалярного произведения:

$$(F,G) := \frac{2}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{F(x)G(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Для систем ортонормированных алгебраических полиномов относительно скалярного произведения достаточно общего вида известна формула Кристоффеля–Дарбу (см. [14, с. 56, теорема 3.2.2]). Для системы Чебышева эта формула имеет вид

$$\frac{T_{n-1}(y)T_n(x) - T_n(y)T_{n-1}(x)}{2(x-y)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} T_k(y)T_k(x).$$

Отсюда, за счет замен $x = \cos t$, $y = \cos\xi$, приходим к формуле

$$\frac{\cos(n-1)\xi\cos nt - \cos n\xi\cos(n-1)t}{2(\cos t - \cos\xi)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\cos k\xi\cos kt. \tag{2.1.2}$$

Возьмем в качестве

$$\xi = \xi_\nu = \frac{2\nu-1}{2n}\pi$$

— ν-й ноль функции $\cos nt$, подставим его в формулу (2.1.2) и, с учетом равенства

$$\cos(n-1)\xi_\nu = (-1)^{\nu+1}\sin\xi_\nu,$$

получим полином

$$\mathfrak{R}_{n-1,\nu}(t) := \frac{(-1)^{\nu+1}\sin\xi_\nu}{2}\cdot\frac{\cos nt}{\cos t - \cos\xi_\nu} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\cos k\xi_\nu\cos kt =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\xi_\nu\cos kt = \frac{1}{2}\Big\{\mathfrak{D}_n(t+\xi_\nu) + \mathfrak{D}_n(t-\xi_\nu)\Big\}, \tag{2.1.3}$$

который представляет собой ядро метода суммирования Рогозинского [33, 34, 35] (см. также [2, гл. VII, §4, с. 483-485], [5, гл. VIII, §1, с.279, 280]); здесь

$$\mathfrak{D}_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \quad \text{— ядро Дирихле.} \tag{2.1.4}$$

В частности, при $\nu = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{n-1,1}(t) = \frac{\sin\xi_1}{2} \cdot \frac{\cos nt}{\cos t - \cos\xi_1} \quad &= \quad \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos k\xi_1 \cos kt = \\ &= \quad \frac{1}{2}\Big\{\mathfrak{D}_n(t+\xi_1) + \mathfrak{D}_n(t-\xi_1)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Отсюда получаем искомое косинус-разложение для полинома Рогозинского первого типа

$$R_{n-1,1}(t) = \frac{2}{\sin\xi_1}\mathfrak{R}_{n-1,1}(t) = \frac{\cos nt}{\cos t - \cos\xi_1} = \frac{2}{\sin\xi_1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos k\xi_1 \cos kt\right). \tag{2.1.6}$$

Из формулы (2.1.6) видно, что свободный коэффициент и все коэффициенты при косинусах в разложении полинома $R_{n-1,1}$ положительные, поэтому равномерная норма этого полинома равняется его значению в нуле[3]:

$$\|R_{n-1,1}\|_C = R_{n-1,1}(0) = \frac{1}{1-\cos\xi_1} \sim 8\left(\frac{n}{\pi}\right)^2. \tag{2.1.7}$$

Перейдем к выводу формулы для полинома Рогозинского второго типа. Из формулы (2.1.3) следует, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{n-1,2}(t) = \frac{-\sin\xi_2}{2} \cdot \frac{\cos nt}{\cos t - \cos\xi_2} \quad &= \quad \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos k\xi_2 \cos kt = \\ &= \quad \frac{1}{2}\Big\{\mathfrak{D}_n(t+\xi_2) + \mathfrak{D}_n(t-\xi_2)\Big\}, \\ \xi_2 \quad &= \quad \frac{3\pi}{2n}. \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Умножив на $\sin\xi_2$ равенства (2.1.5), а на $\sin\xi_1$ — равенства (2.1.8), придем к равенствам

$$(\sin\xi_2)\mathfrak{R}_{n-1,1}(t) = \frac{\sin\xi_1 \sin\xi_2}{2} \cdot \frac{\cos nt}{\cos t - \cos\xi_1} = \frac{\sin\xi_2}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \sin\xi_2 \cos k\xi_1 \cos kt, \tag{2.1.9}$$

[3] Выражение: $A(n) \sim B(n)$ (при $n \to \infty$) означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A(n)}{B(n)} = 1$.

$$(\sin\xi_1)\mathfrak{R}_{n-1,2}(t) = \frac{-\sin\xi_1\sin\xi_2}{2}\cdot\frac{\cos nt}{\cos t-\cos\xi_2} = \\ = \frac{\sin\xi_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\sin\xi_1\cos k\xi_2\cos kt. \quad (2.1.10)$$

Заметим, что в силу равенств $\cos(n-1)\xi_1 = \sin\xi_1, \quad \cos(n-1)\xi_2 = -\sin\xi_2$, старшие коэффициенты в правых частях равенств (2.1.9), (2.1.10) соответственно равны числам

$$\sin\xi_2\sin\xi_1, \quad -\sin\xi_1\sin\xi_2.$$

Поэтому после сложения равенств (2.1.9), (2.1.10) получим

$$(\sin\xi_2)\mathfrak{R}_{n-1,1}(t) + (\sin\xi_1)\mathfrak{R}_{n-1,2}(t) = \\ = \frac{\sin\xi_1\sin\xi_2}{2}\cdot\cos nt\cdot\left\{\frac{1}{\cos t-\cos\xi_1} - \frac{1}{\cos t-\cos\xi_2}\right\} = \\ = \frac{\sin\xi_1+\sin\xi_2}{2} + \sum_{k=1}^{n-2}(\sin\xi_2\cos k\xi_1 + \sin\xi_1\cos k\xi_2)\cos kt.$$

Отсюда, с учетом равенства

$$\frac{1}{\cos t-\cos\xi_1} - \frac{1}{\cos t-\cos\xi_2} = \frac{\cos\xi_1-\cos\xi_2}{(\cos t-\cos\xi_1)(\cos t-\cos\xi_2)},$$

выводим косинус-разложение для полинома Рогозинского второго типа

$$R_{n-2,2}(t) = \frac{\cos nt}{(\cos t-\cos\xi_1)(\cos t-\cos\xi_2)} = \\ = 2\frac{(\sin\xi_2)\mathfrak{R}_{n-1,1}(t) + (\sin\xi_1)\mathfrak{R}_{n-1,2}(t)}{(\sin\xi_1\sin\xi_2)(\cos\xi_1-\cos\xi_2)} = \\ = \frac{\sin\xi_1+\sin\xi_2 + 2\sum_{k=1}^{n-2}(\sin\xi_2\cos k\xi_1+\sin\xi_1\cos k\xi_2)\cos kt}{(\sin\xi_1\sin\xi_2)(\cos\xi_1-\cos\xi_2)}, \quad (2.1.11)$$

где

$$\xi_1 = \frac{\pi}{2n}, \quad \xi_2 = \frac{3\pi}{2n}.$$

Покажем, что свободный коэффициент и все коэффициенты при косинусах в разложении (2.1.11) положительные. Для этого преобразуем указанное разложение. Введем обозначение

$$\alpha := \xi_1 = \frac{\pi}{2n}.$$

Тогда

$$3\alpha = \xi_2.$$

В силу (2.1.11), с учетом равенства

$$\sin 3\alpha = (1 + 2\cos 2\alpha)\sin\alpha, \tag{2.1.12}$$

имеем

$$R_{n-2,2}(t) = \frac{\cos nt}{(\cos t - \cos\alpha)(\cos t - \cos 3\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + 2\sum_{k=1}^{n-2}(\sin 3\alpha\cos k\alpha + \sin\alpha\cos 3k\alpha)\cos kt}{(\sin\alpha\sin 3\alpha)(\cos\alpha - \cos 3\alpha)} =$$

$$= \frac{2(1+\cos 2\alpha) + 2\sum_{k=1}^{n-2}\{(1+2\cos 2\alpha)\cos k\alpha + \cos 3k\alpha\}\cos kt}{(\cos\alpha - \cos 3\alpha)\sin 3\alpha}. \tag{2.1.13}$$

Применив формулу

$$\cos 3k\alpha = (2\cos 2k\alpha - 1)\cos k\alpha$$

преобразуем коэффициент при $\cos kt$ в (2.1.13):

$$(1+2\cos 2\alpha)\cos k\alpha + \cos 3k\alpha = 2(\cos 2k\alpha + \cos 2\alpha)\cos k\alpha =$$
$$= 4\cos(k-1)\alpha\cos k\alpha\cos(k+1)\alpha.$$

Отсюда с учетом формулы (2.1.12) и равенства

$$(\cos\alpha - \cos 3\alpha)\sin 3\alpha = 4\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

окончательно получаем

$$R_{n-2,2}(t) = \frac{\cos nt}{(\cos t - \cos\alpha)(\cos t - \cos 3\alpha)} =$$

$$= \frac{1 + \cos 2\alpha + 4\sum_{k=1}^{n-2}\cos(k-1)\alpha\cos k\alpha\cos(k+1)\alpha\cos kt}{2(1+2\cos 2\alpha)\sin^3\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-2}\lambda_k\cos kt, \tag{2.1.14}$$

где

$$\lambda_k = \frac{2\cos(k-1)\alpha\cos k\alpha\cos(k+1)\alpha}{(1+2\cos 2\alpha)\sin^3\alpha\cos\alpha}, \quad k=0,1,2,\ldots,n-2, \quad \alpha=\frac{\pi}{2n}\,. \tag{2.1.15}$$

Несложно проверить, что все коэффициенты $\lambda_k > 0$. Поэтому равномерная норма полинома $R_{n-2,2}$ равняется его значению в нуле:

$$\|R_{n-2,2}\|_C = R_{n-2,2}(0) = \frac{1}{(1-\cos\alpha)(1-\cos 3\alpha)} \sim \left(\frac{8}{3}\right)^2\left(\frac{n}{\pi}\right)^4. \tag{2.1.16}$$

2.1.2. *Функция $\mathcal{X}_h^1$ при $h=\frac{\pi}{2n}$ не приближается пространством T_{n-1} в L-метрике.* Рассмотрим сначала случай приближения функции $\mathcal{X}_h^1$ константами. В этом случае имеет место следующее утверждение, которое приводится здесь без доказательства в виду его тривиальности.

Предложение 2.1.1. *Величина наилучшего интегрального приближения функции $\mathcal{X}_h^1$ пространством T_0 вычисляется по формуле*

$$E_0(\mathcal{X}_h^1)_L = \begin{cases} 1, & 0<h\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi-h}{h}, & \frac{\pi}{2}<h\leqslant\pi. \end{cases}$$

Сейчас будет предложено несколько иное доказательство (отличное от применявшегося в теореме 1.3.1) утверждения, что функция $\mathcal{X}_h^1$ при $h = \xi_1 = \dfrac{\pi}{2n}$ не приближается пространством T_{n-1} в метрике пространства L.

Теорема 2.1.1. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $\xi_1 = \dfrac{\pi}{2n}$. Тогда $E_{n-1}(\mathcal{X}_{\xi_1}^1)_L = \|\mathcal{X}_{\xi_1}^1\|_L = 1$.*

Доказательство. В случае $n=1$ утверждение теоремы следует из предложения 2.1.1.

Пусть $n\geqslant 2$. Рассмотрим полином $\gamma R_{n-1,1}$, где $R_{n-1,1}$ — полином Рогозинского первого типа степени $n-1$ (см. определение 2.1.1), γ — произвольное положительное число, удовлетворяющие соотношениям

$$0<\gamma R_{n-1,1}(0) = \frac{\gamma}{1-\cos\xi_1} \leqslant \mathcal{X}_{\xi_1}^1(0) = \frac{1}{2\xi_1}\,.$$

В этом случае $\operatorname{sign}\{\mathcal{X}_{\xi_1}^1(t)-\gamma R_{n-1,1}(t)\} = \operatorname{sign}\cos nt$. Учитывая ортогональность функции $\operatorname{sign}\cos nt$ пространству T_{n-1} (см. [1, с. 100, формула (1)]), с помощью теоремы 1.2.2 приходим к выводу, что полином $\gamma R_{n,1}$ является полиномом наилучшего интегрального приближения для $\mathcal{X}_{\xi_1}^1$.

Вычислим величину наилучшего приближения. С учетом указанного свойства ортогональности, по схеме, разработанной А.А.Марковым (см., например, доказательство теоремы 10.5 на с. 84, 85 в монографии [24] и предшествующие ей предложения о канонической сигнатуре, а также [1, с. 96-103]), получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(\mathcal{X}^1_{\xi_1})_L &= 2\int_0^\pi |\mathcal{X}^1_{\xi_1}(t) - \gamma R_{n-1,1}(t)|dt = \\ &= 2\int_0^\pi \left\{\mathcal{X}^1_{\xi_1}(t) - \gamma R_{n-1,1}(t)\right\} \operatorname{sign} \cos nt\, dt = \\ &= 2\int_0^\pi \left\{\mathcal{X}^1_{\xi_1}(t)\right\} \operatorname{sign} \cos nt\, dt = 1. \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Теорема 2.1.1 доказана.

Отметим, что в силу теоремы 1.3.1 точка $h = \xi_1 = \frac{\pi}{2n}$ является максимальной точкой, для которой имеет место свойство «неприближаемости», т.е. при всех $0 < h \leqslant \xi_1$ функция $\mathcal{X}^1_h$ не приближается пространством T_{n-1} в L-метрике, а при $\xi_1 < h \leqslant \pi$ — приближается:

$$E_{n-1}(\mathcal{X}^1_h)_L = 1 \quad \text{при} \quad 0 < h \leqslant \frac{\pi}{2n}, \quad E_{n-1}(\mathcal{X}^1_h)_L < 1 \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2n} < h \leqslant \pi.$$

2.1.3. *Норма в L полинома Рогозинского первого типа.* Задачу о точной константе в неравенстве между равномерной и интегральной нормами тригонометрического полинома заданной степени изучали Д.Джексон (см. [30]), С.М.Никольский (см. [13]), С.Б.Стечкин (см. [16,17]), Л.В.Тайков [16,17], В.Ф.Бабенко, В.А.Кофанов и С.А.Пичугов [21], Д.В.Горбачев [4, 28].

В 1965 году Л.В.Тайков [16], в частности, установил, что полином Рогозинского первого типа дает точную по порядку оценку снизу для указанной константы. Следующая формула, фактически, доказана в [16]

$$\|R_{n-1,1}\|_L = 4\int_0^{\xi_1} R_{n-1,1}(t)\, dt, \quad \text{где} \quad \xi_1 = \frac{\pi}{2n}\,, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{2.1.18}$$

Эту формулу можно получить также, используя иные соображения. А именно, указанная формула следует из утверждения (2.1.17). Действительно, имеем

$$\begin{aligned} 1 &= E_{n-1}(\mathcal{X}^1_{\xi_1})_L = 2\int_0^\pi |\mathcal{X}^1_{\xi_1}(t) - \gamma R_{n-1,1}(t)|dt = \\ &= 2\int_0^{\xi_1} \{\mathcal{X}^1_{\xi_1}(t) - \gamma R_{n-1,1}(t)\}dt + 2\int_{\xi_1}^\pi |\mathcal{X}^1_{\xi_1}(t) - \gamma R_{n-1,1}(t)|dt = \\ &= 2\int_0^{\xi_1} \mathcal{X}^1_{\xi_1}(t)dt - 2\gamma\int_0^{\xi_1} R_{n-1,1}(t)dt + 2\gamma\int_{\xi_1}^\pi |R_{n-1,1}(t)|dt = \\ &= 1 - 2\gamma\int_0^{\xi_1} R_{n-1,1}(t)dt + 2\gamma\int_{\xi_1}^\pi |R_{n-1,1}(t)|dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^{\xi_1} R_{n-1,1}(t)dt = \int_{\xi_1}^{\pi} |R_{n-1,1}(t)|dt.$$

Отсюда, с учетом четности полинома $R_{n-1,1}$ и его положительности на $[0, \xi_1)$, получаем

$$\begin{aligned}\|R_{n-1,1}\|_L &= 2\int_0^{\pi} |R_{n-1,1}(t)|dt = 2\int_0^{\xi_1} |R_{n-1,1}(t)|dt + 2\int_{\xi_1}^{\pi} |R_{n-1,1}(t)|dt = \\ &= 2\int_0^{\xi_1} R_{n-1,1}(t)dt + 2\int_{\xi_1}^{\pi} |R_{n-1,1}(t)|dt = 4\int_0^{\xi_1} R_{n-1,1}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Таким образом, в силу (2.1.18), (2.1.6) имеем

$$\|R_{n-1,1}\|_L = 4\int_0^{\xi_1} R_{n-1,1}(t)\,dt =$$
$$= \frac{8}{\sin\xi_1}\left(\frac{\xi_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin 2k\xi_1}{2k}\right) = \frac{8\xi_1}{\sin\xi_1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin 2k\xi_1}{2k\xi_1}\right).$$

Отсюда видно, что

$$\|R_{n-1,1}\|_L \sim \left(\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\right) n.$$

Поэтому с учетом (2.1.7), получаем асимптотическое равенство

$$\frac{\|R_{n-1,1}\|_C}{\|R_{n-1,1}\|_L} \sim \frac{n}{\pi\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt} = n\cdot\frac{0.539975\ldots}{\pi} = n\cdot 0.171879\ldots,$$

установленное в [16] иным путем.

2.1.4. *Приближение функции $\mathcal{X}_h^1$ при $h = \frac{2\ell-1}{2n}\pi$, $\ell = 2, 3, \ldots, n$ пространством T_{n-1} в интегральной метрике.* Нули функции $\cos nt$ обозначим через

$$\xi_j := \frac{2j-1}{2n}\pi, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

В этом пункте будут найдены величины $E_{n-2}(\mathcal{X}_h^1)_L$ и $E_{n-1}(\mathcal{X}_h^1)_L$ при $h = \xi_\ell = \frac{2\ell-1}{2n}\pi$ для $\ell = 2, 3, \ldots, n$ (случай $\ell = 1$ был рассмотрен в пункте 2.1.2).

Прежде чем сформулировать результат, введем следующий тригонометрический полином.

Определение 2.1.2. Для натурального числа $2 \leqslant \ell \leqslant n-1$ обозначим через $\tau_{n-2,\ell}$ косинус-полином степени $n-2$, который интерполирует функцию $\mathcal{X}_{\xi_\ell}^1$ в следующих $n-1$ точках: ξ_j, $\quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad j \neq \ell$.

Указанный в определении 2.1.2 полином $\tau_{n-2,\,\ell}$ существует и единственный (см. [24, гл. 3, §3, с. 67,68, свойство 3]), поскольку система функций $\{1, \cos t, \cos 2t, \ldots, \cos(n-2)t\}$ является чебышевской на $[0,\pi]$. Основным утверждением данного пункта является

Теорема 2.1.2. *Пусть* $n,\ell \in \mathbb{N}$, $\quad 2 \leqslant \ell \leqslant n$, $\quad \xi_\ell = \frac{2\ell-1}{2n}\pi$. *Тогда справедливы равенства*

$$\|\mathcal{X}^1_{\xi_\ell} - \tau_{n-2,\,\ell}\|_L = E_{n-2}(\mathcal{X}^1_{\xi_\ell})_L = E_{n-1}(\mathcal{X}^1_{\xi_\ell})_L = \frac{1}{2\ell-1} \quad \text{при} \quad 2 \leqslant \ell \leqslant n-1, \tag{2.1.19}$$

$$\left\|\mathcal{X}^1_{\xi_n} - \frac{1}{2\xi_n}\right\|_L = E_0(\mathcal{X}^1_{\xi_n})_L = E_{n-1}(\mathcal{X}^1_{\xi_n})_L = \frac{1}{2n-1} \quad \text{при} \quad 2 \leqslant \ell = n. \tag{2.1.20}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $2 \leqslant \ell \leqslant n-1$. Поскольку полином $\tau_{n-2,\,\ell}$ и функция $\mathcal{X}^1_{\xi_\ell}$ являются четными функциями, то $\tau_{n-2,\,\ell}$ интерполирует $\mathcal{X}^1_{\xi_\ell}$ не только в точках: ξ_j, $\quad 1 \leqslant j \leqslant n$, $\quad j \neq \ell$, но и в точках: $-\xi_j$, $\quad 1 \leqslant j \leqslant n$, $\quad j \neq \ell$.

Точки $\pm\xi_j$, $\quad 1 \leqslant j \leqslant n$, $\quad j \neq \ell$, разбивают тор (который удобно представлять в виде единичной окружности) на $2(n-1)$ участков, расположенных симметрично относительно нуля. Причем $2(n-2)$ участков являются «малыми», т.е. имеют длину $\frac{\pi}{n}$, а два участка с центрами в точках $\xi_\ell, -\xi_\ell$ являются «большими» с длиной $\frac{2\pi}{n}$.

В концевых точках произвольного «малого» участка полином $\tau_{n-2,\,\ell}$ принимает одинаковое значение (либо нулевое значение, либо значение $\frac{1}{2\xi_\ell}$). Поэтому внутри каждого из этих участков производная $\tau'_{n-2,\,\ell}$ имеет, по крайней мере, один ноль. Но поскольку «малых» участков $2(n-2)$, то других нулей у полинома $\tau'_{n-2,\,\ell}$ быть не должно, т.к. его степень рана $n-2$. Следовательно внутри каждого «малого» участка имеется ровно по одному нулю. Отсюда заключаем, что производная не обращается в ноль на обоих «больших» участках. Поэтому полином $\tau_{n-2,\,\ell}$ строго убывает на $[\xi_{\ell-1}, \xi_{\ell+1}]$ от значения $\tau_{n-2,\,\ell}(\xi_{\ell-1}) = \mathcal{X}^1_{\xi_\ell}(\xi_{\ell-1}) = \frac{1}{2\xi_\ell}$ до значения $\tau_{n-2,\,\ell}(\xi_{\ell+1}) = \mathcal{X}^1_{\xi_\ell}(\xi_{\ell+1}) = 0$, а на отрезке $[-\xi_{\ell+1}, -\xi_{\ell-1}]$ полином $\tau_{n-2,\,\ell}$ строго возрастает от нулевого значения до значения $\frac{1}{2\xi_\ell}$. В точках разрыва ξ_ℓ, $-\xi_\ell$ функции $\mathcal{X}^1_{\xi_\ell}$ полином $\tau_{n-2,\,\ell}$ принимает одинаковые положительные значения. Отсюда получаем, что

$$\operatorname{sign}\{\mathcal{X}^1_{\xi_\ell}(t) - \tau_{n-2,\,\ell}(t)\} = (-1)^{\ell+1}\operatorname{sign}\cos nt.$$

Функция $\operatorname{sign}\cos nt$ ортогональна пространству T_{n-1}. Отсюда с помощью теоремы 1.2.2 приходим к выводу, что полином $\tau_{n-2,\,\ell}$ является полиномом наилучшего интегрального приближения для $\mathcal{X}^1_{\xi_\ell}$ в пространстве T_{n-1}. Вычислим величину наилучшего приближения. С учетом указанного свойства ортогональности, получаем равенства

$$\begin{aligned} E_{n-2}(\mathcal{X}^1_{\xi_\ell})_L &= E_{n-1}(\mathcal{X}^1_{\xi_\ell}) = 2\int_0^\pi |\mathcal{X}^1_{\xi_\ell}(t) - \tau_{n-2,\,\ell}(t)|dt = \\ &= 2\left|\int_0^\pi \left\{\mathcal{X}^1_{\xi_\ell}(t) - \tau_{n-2,\,\ell}(t)\right\}\,(-1)^{\ell+1}\mathrm{sign}\,\cos nt\,dt\right| = \\ &= 2\left|\int_0^\pi \mathcal{X}^1_{\xi_\ell}(t)\,\mathrm{sign}\,\cos nt\,dt\right| = \frac{1}{2\ell-1}, \end{aligned}$$

эквивалентных утверждению (2.1.19).

Перейдем к случаю $\ell = n \geqslant 2$. Следующие утверждения

$$E_{n-1}(\mathcal{X}^1_{\xi_n})_L \leqslant E_0(\mathcal{X}^1_{\xi_n})_L \leqslant \left\|\mathcal{X}^1_{\xi_n} - \frac{1}{2\xi_n}\right\|_L = \frac{1}{2n-1}$$

тривиальны. Утверждения теоремы 1.3.1 содержит, в частности, равенство

$$E_{n-1}(\mathcal{X}^1_{\xi_n})_L = \frac{1}{2n-1}.$$

Отсюда получаем утверждение (2.1.20). Теорема 2.1.2 доказана.

Следствие 2.1.1. *Пусть* $n, \ell \in \mathbb{N}$, $\quad n \geqslant 2$, $\quad 2 \leqslant \ell \leqslant n+1$, $\quad \widetilde{\xi}_\ell = \frac{2\ell-1}{2(n+1)}\pi$. *Тогда справедливо равенство*

$$E_{n-1}(\mathcal{X}^1_{\widetilde{\xi}_\ell})_L = \frac{1}{2\ell-1}\,.$$

Причем, в случае $2 \leqslant \ell \leqslant n$ *косинус-полином* $\tau_{n-1,\,\ell}$ *степени* $n-1$, *инерполирующий функцию* $\mathcal{X}^1_{\widetilde{\xi}_\ell}$ *в следующих* n *точках:*

$$\widetilde{\xi}_j := \frac{2j-1}{2(n+1)}\pi\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant n+1, \quad j \neq \ell,$$

является полиномом наилучшего L*-приближения функции* $\mathcal{X}^1_{\widetilde{\xi}_\ell}$ *среди всех полиномов из* T_{n-1}; *а в случае* $\ell = n+1$ *полином* $\tau \equiv 1/(2\widetilde{\xi}_{n+1})$ *является полиномом наилучшего* L*-приближения функции* $\mathcal{X}^1_{\widetilde{\xi}_{n+1}}$ *среди всех полиномов из* T_{n-1}.

2.1.5. *Норма в* L *полинома Рогозинского второго типа.* В данном пункте найдена явная формула для нормы в L полинома $R_{n-2,2}$ Рогозинского второго типа. Это формула будет получена в качестве следствия теоремы 2.1.2 и формул (2.1.14)–(2.1.15) косинус-разложения полинома $R_{n-2,2}$. Здесь будут использоваться те же обозначения, что и в пункте 2.1.1 и ограничение на натуральное число n соответствующее случаю полинома Рогозинского второго типа, а именно,

$$\alpha := \xi_1 = \frac{\pi}{2n}\,, \quad 3\alpha = \xi_2, \quad n \geqslant 3.$$

Полином $\tau_{n-2,\,2}$ наилучшего L-приближения функции $\mathcal{X}^1_{\xi_2} = \mathcal{X}^1_{3\alpha}$ совпадает, с точностью до постоянного положительного множителя, с полиномом Рогозинского второго типа степени $n-2$. А именно,

$$\tau_{n-2,\,2}(t) = bR_{n-2,2}(t), \quad \text{где} \quad b := \frac{1}{3\pi}(\cos\alpha - \cos 3\alpha)\sin\alpha.$$

Множитель b выбран из условия интерполяции

$$\tau_{n-2,\,2}(\alpha) = \mathcal{X}^1_{3\alpha}(\alpha) = \frac{1}{6\alpha}\,.$$

В остальных точках $\xi_j, \quad j = 3, 4, \ldots, n$, в силу определения 2.1.1, полином $R_{n-2,2}$ (а значит и полином $\tau_{n-2,\,2}$) обращается в ноль, т.е. принимает в этих точках тоже самое значение, что и функция $\mathcal{X}^1_{3\alpha}$.

Применив теорему 2.1.2 в случае $\ell = 2$, получаем

$$\frac{1}{3} = E_{n-2}(\mathcal{X}^1_{3\alpha})_L = \|\, bR_{n-2,2} - \mathcal{X}^1_{3\alpha}\|_L = 2\int_0^\pi |\, bR_{n-2,2}(t) - \mathcal{X}^1_{3\alpha}(t)|\, dt =$$

$$= 2\left\{\int_0^\alpha (bR_{n-2,2}(t) - \mathcal{X}^1_{3\alpha}(t))\, dt + \int_\alpha^{3\alpha} (\mathcal{X}^1_{3\alpha}(t) - bR_{n-2,2}(t))\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{3\alpha}^\pi |\, bR_{n-2,2}(t)|\, dt \right\} = \frac{1}{3} + 2b\left\{\int_0^\alpha R_{n-2,2}(t)\, dt - \right.$$

$$\left. - \int_\alpha^{3\alpha} R_{n-2,2}(t)\, dt + \int_{3\alpha}^\pi |R_{n-2,2}(t)|\, dt\right\}.$$

Отсюда следует соотношение

$$\int_\alpha^{3\alpha} R_{n-2,2}(t)\, dt = \int_0^\alpha R_{n-2,2}(t)\, dt + \int_{3\alpha}^\pi |R_{n-2,2}(t)|\, dt,$$

которое, в свою очередь, с учетом положительности полинома $R_{n-2,2}$ на отрезке $[0, 3\alpha]$, влечет равенства

$$\|R_{n-2,2}\|_L = 2\int_0^\pi |R_{n-2,2}(t)|\, dt = 4\int_\alpha^{3\alpha} R_{n-2,2}(t)\, dt.$$

Применив разложение (2.1.14), получим

$$\|R_{n-2,2}\|_L \quad = \quad 4\int_\alpha^{3\alpha} R_{n-2,2}(t)\, dt = 4\left\{\alpha\lambda_0 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k}\lambda_k(\sin 3k\alpha - \sin k\alpha)\right\} =$$

$$= \quad 8\left\{\frac{\alpha\lambda_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}\lambda_k\sin k\alpha\cos 2k\alpha\right\},$$

где

$$\lambda_k := \frac{2\cos(k-1)\alpha\cos k\alpha\cos(k+1)\alpha}{(1+2\cos 2\alpha)\sin^3\alpha\cos\alpha}, \quad k=0,1,2,\ldots,n-2.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}\|R_{n-2,2}\|_L &= \frac{8}{(1+2\cos 2\alpha)\sin^3\alpha\cos\alpha}\Big\{\alpha\cos^2\alpha+ \\ &+ \sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{2k}\cos(k-1)\alpha\cos(k+1)\alpha\sin 4k\alpha\Big\} = \\ &= \frac{1}{(1+2\cos 2\alpha)\sin^3\alpha\cos\alpha}\Big\{8\alpha\cos^2\alpha+ \\ &+ \sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}\{\sin 6k\alpha+\sin(4k+2)\alpha+\sin(4k-2)\alpha+\sin 2k\alpha\}\Big\}.\end{aligned}$$

Отсюда и (2.1.16), приходим к следующему асимптотическому равенству

$$\begin{aligned}\frac{\|R_{n-2,2}\|_C}{\|R_{n-2,2}\|_L} &\sim \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2n}{\displaystyle\int_0^\pi\frac{\sin 3t}{t}\,dt+2\int_0^\pi\frac{\sin 2t}{t}\,dt+\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}\,dt} = \\ &= n\cdot\frac{0.31431704704\ldots}{\pi} = n\cdot 0.10005022347\ldots\end{aligned}$$

2.2. **Приближение 2π-периодизированной функции Хаара тригонометрическими полиномами в интегральной метрике.**

2.2.1. *Вывод формул разложения по синусам для полиномов Тайкова первого и второго типа на основе формулы Кристоффеля–Дарбу.*

Определение 2.2.1. Пусть $1\leqslant j\leqslant n-1$, $n,j\in\mathbb{N}$. Полином

$$\mathcal{T}_{n-j,\,j}(t) := \frac{\sin nt}{\prod\limits_{\nu=1}^{j}(\cos t-\cos\eta_\nu)}, \quad \eta_\nu=\frac{\nu\pi}{n} \tag{2.2.1}$$

будем называть полиномом Тайкова типа j степени $n-j$.

Полином Тайкова первого типа появился в работе [17] при исследовании величины

$$\widetilde{C}_n := \sup_{\tau\in T_n,\,\|\tau\|_L\leqslant 1}\|\widetilde{\tau}\|_C,$$

где

$$\widetilde{\tau}(t) = \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \sin \nu t - b_\nu \cos \nu t)$$

— сопряженный полином с полиномом

$$\tau(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t).$$

В указанной работе [17, с. 119, лемма 3] было найдено синус-разложение полинома

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{n-1,\,1}(t) &= \frac{\sin nt}{\cos t - \cos \eta_1} = \frac{2}{\sin \eta_1} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sin \nu\eta_1 \sin \nu t = \\ &= \frac{2}{\sin \eta_1} \sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu\eta_1 \sin \nu t = \frac{1}{\sin \eta_1} \left\{ \mathfrak{D}_n(t-\eta_1) - \mathfrak{D}_n(t+\eta_1) \right\}, \\ \eta_1 &= \frac{\pi}{n} \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

с положительными коэффициентами $\dfrac{2\sin \nu\eta_1}{\sin \eta_1} > 0$ при $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$; здесь $\mathfrak{D}_n$ — ядро Дирихле (см. формулу (2.1.4)).

В данном пункте приводится иное доказательство формулы (2.2.2) по схеме предложенной в пункте 2.1.1. Кроме того, будет найдено синус-разложение полинома Тайкова $\mathcal{T}_{n-2,\,2}$ второго типа.

Система алгебраических полиномов Чебышева второго рода

$$\left\{ U_k(x) = \frac{\sin(k+1)t}{\sin t} \right\}_{k=0}^{\infty}, \quad \text{где} \quad x = \cos t,$$

является ортонормированной на отрезке $[-1, 1]$ с весом $w_{1/2}(x) := \sqrt{1-x^2}$, т.е.

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} U_k(x) U_j(x) \sqrt{1-x^2}\, dx = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Применив формулу Кристоффеля–Дарбу (см. [14, с. 56, теорема 3.2.2]) для этой системы, с использованием замен $x = \cos t$, $y = \cos \xi$, получим[4]

$$\frac{\sin(n-1)\xi \sin nt - \sin n\xi \sin(n-1)t}{2(\cos t - \cos \xi) \sin t \sin \xi} = 1 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\sin(k+1)t \sin(k+1)\xi}{\sin t \sin \xi}. \tag{2.2.3}$$

[4] В случае когда у знака суммы нижний индекс суммирования больше верхнего, считаем такую сумму равной нулю.

Отсюда, приходим к формуле

$$\frac{\sin(n-1)\xi\sin nt-\sin n\xi\sin(n-1)t}{2(\cos t-\cos\xi)}=\sum_{k=1}^{n-1}\sin k\xi\sin kt. \tag{2.2.4}$$

Взяв в этой формуле в качестве ξ первый положительный ноль функции $\sin nt$, т.е. положив $\xi=\eta_1=\frac{\pi}{n}$, и учитывая равенство

$$\sin(n-1)\eta_1=\sin\eta_1, \tag{2.2.5}$$

получим формулу

$$\frac{\sin\eta_1}{2}\cdot\frac{\sin nt}{\cos t-\cos\eta_1}=\sum_{k=1}^{n-1}\sin k\eta_1\sin kt=\frac{1}{2}\Big\{\mathfrak{D}_n(t-\eta_1)-\mathfrak{D}_n(t+\eta_1)\Big\},\quad \eta_1=\frac{\pi}{n}, \tag{2.2.6}$$

эквивалентную формуле (2.2.2).

Перейдем сейчас к выводу формулы для полинома Тайкова второго типа. Согласно определению 2.2.1 в этом случае $j=2$, $n\geqslant 3$. Возьмем теперь в формуле (2.2.3) в качестве $\xi=\eta_2=\frac{2\pi}{n}$ второй положительный ноль функции $\sin nt$, с учетом равенства

$$\sin(n-1)\eta_2=-\sin\eta_2, \tag{2.2.7}$$

получим

$$\begin{aligned}\frac{-\sin\eta_2}{2}\cdot\frac{\sin nt}{\cos t-\cos\eta_2}&=\sum_{k=1}^{n-1}\sin k\eta_2\sin kt=\\&=\frac{1}{2}\Big\{\mathfrak{D}_n(t-\eta_2)-\mathfrak{D}_n(t+\eta_2)\Big\},\quad \eta_2=\frac{2\pi}{n}.\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Умножив на $\sin\eta_2$ равенства (2.2.4), а на $\sin\eta_1$ — равенства (2.2.8), придем к равенствам

$$\frac{\sin\eta_1\sin\eta_2}{2}\cdot\frac{\sin nt}{\cos t-\cos\eta_1}=\sum_{k=1}^{n-1}\sin\eta_2\sin k\eta_1\sin kt, \tag{2.2.9}$$

$$\frac{-\sin\eta_1\sin\eta_2}{2}\cdot\frac{\sin nt}{\cos t-\cos\eta_2}=\sum_{k=1}^{n-1}\sin\eta_1\sin k\eta_2\sin kt. \tag{2.2.10}$$

Заметим, что в силу (2.2.5), (2.2.7) старшие коэффициенты в правых частях равенств (2.2.9), (2.2.10) соответственно равны числам

$$\sin\eta_2\sin\eta_1,\qquad -\sin\eta_1\sin\eta_2.$$

Поэтому после сложения равенств (2.2.9), (2.2.10) получим

$$\frac{\sin\eta_1\sin\eta_2}{2}\cdot\sin nt\cdot\left\{\frac{1}{\cos t-\cos\eta_1}-\frac{1}{\cos t-\cos\eta_2}\right\}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n-2}(\sin\eta_2\sin k\eta_1+\sin\eta_1\sin k\eta_2)\sin kt.$$

Отсюда, с учетом равенства

$$\frac{1}{\cos t-\cos\eta_1}-\frac{1}{\cos t-\cos\eta_2}=\frac{\cos\eta_1-\cos\eta_2}{(\cos t-\cos\eta_1)(\cos t-\cos\eta_2)}\,,$$

выводим синус-разложение для полинома Тайкова второго типа

$$\mathcal{T}_{n-2,2}(t)=\frac{\sin nt}{(\cos t-\cos\eta_1)(\cos t-\cos\eta_2)}=$$
$$=\frac{2\sum\limits_{k=1}^{n-2}(\sin\eta_2\sin k\eta_1+\sin\eta_1\sin k\eta_2)\sin kt}{(\sin\eta_1\sin\eta_2)(\cos\eta_1-\cos\eta_2)}=\sum_{k=1}^{n-2}\rho_k\sin kt, \quad (2.2.11)$$

с положительными коэффициентами

$$\rho_k=\frac{2\sin k\beta\cos\frac{k-1}{2}\beta\cos\frac{k+1}{2}\beta}{\sin\beta\cos\beta\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{3\beta}{2}}>0\,,\quad k=1,2,\ldots,n-2, \qquad (2.2.12)$$

где

$$\beta:=\eta_1=\frac{\pi}{n}\,,\quad 2\beta=\eta_2=\frac{2\pi}{n}\,.$$

2.2.2. *Функция $\mathcal{X}_h^2$ при $h=\frac{\pi}{n}$ не приближается пространством T_{n-1} в интегральной метрике.* Рассмотрим сначала случай приближения функции $\mathcal{X}_h^2$ константами. В этом случае имеет место следующее утверждение, которое приводится здесь без доказательства в виду его тривиальности.

Предложение 2.2.1. *При любом $h\in(0,\pi]$ функция $\mathcal{X}_h^2$ не приближается в интегральной метрике пространством T_0, т.е.*

$$E_0(\mathcal{X}_h^2)_L=1\quad \textit{при}\quad 0<h\leqslant\pi.$$

Причем, если $0<h<\pi$, то наилучший приближающий элемент τ из T_0 является единственным и есть $\tau\equiv 0$; если же $h=\pi$, то наилучший приближающий элемент $\tau\in T_0$ не является единственным и его общий вид: $\tau\equiv c$, где $|c|\leqslant\frac{1}{2\pi}$.

В следующем утверждении будет предложено несколько иное доказательство (отличное от применявшегося в теореме 1.3.2) утверждения, что функция $\mathcal{X}_h^2$ при $h=\eta_1=\dfrac{\pi}{n}$ не приближается пространством T_{n-1} в метрике пространства L.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\eta_1 = \dfrac{\pi}{n}$. *Тогда* $E_{n-1}(\mathcal{X}^2_{\eta_1})_L = \|\mathcal{X}^2_{\eta_1}\|_L = 1$.

Доказательство. При $n = 1$ утверждение теоремы следует из предложения 2.2.1.

Пусть $n \geqslant 2$. Из представлений (2.2.2) полинома Тайкова $\mathcal{T}_{n-1,\,1}$ первого типа степени $n-1$ следует, что производная этого полинома имеет ровно по одному нулю на следующих $n-1$ открытых интервалах

$$I_1 := (0, \eta_2), \quad I_2 := (\eta_2, \eta_3), \quad I_3 := (\eta_3, \eta_4), \quad \ldots, \quad I_{n-1} := (\eta_{n-1}, \eta_n),$$

где $\eta_\nu = \frac{\nu\pi}{n}$. Действительно, производная $\mathcal{T}'_{n-1,\,1}$ является косинус-полиномом степени $n-1$ и имеет, по крайней мере, по одному нулю в $n-1$ не пересекающихся интервалах $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$, принадлежащих $(0,\pi)$. Следовательно, $\mathcal{T}'_{n-1,\,1}$ имеет, по крайней мере, $n-1$ нулей в $(0,\pi)$. Но других нулей в $(0,\pi)$ этот косинус-полиномом не может иметь, поскольку его степень равна $n-1$ и он отличен от тождественного нуля.

Обозначим через ϑ_k ноль производной $\mathcal{T}'_{n-1,\,1}$, принадлежащий интервалу I_k. Отметим, что в силу положительности коэффициентов при синусах в разложении (2.2.2) полинома $\mathcal{T}_{n-1,\,1}$, производная $\mathcal{T}'_{n-1,\,1}$ в нуле положительна и принимает в этой точке свое максимальное значение, точнее $\|\mathcal{T}'_{n-1,\,1}\|_C = \mathcal{T}'_{n-1,\,1}(0)$.

Рассмотрим полином $\gamma\mathcal{T}_{n-1,\,1}$, где γ — произвольное положительное число, удовлетворяющие соотношениям

$$0 < \gamma\mathcal{T}_{n-1,1}(\vartheta_1) = \max_{t\in[0,\eta_2]} \gamma\mathcal{T}_{n-1,1}(t) \leqslant \frac{1}{2\eta_1}\,.$$

В этом случае $\operatorname{sign}\{\mathcal{X}^2_{\eta_1}(t) - \gamma\mathcal{T}_{n-1,1}(t)\} = \operatorname{sign}\sin nt$. Учитывая ортогональность функции $\operatorname{sign}\sin nt$ пространству T_{n-1} (см. [1, с. 100, формула (2)]), с помощью теоремы 1.2.2 приходим к выводу, что полином $\gamma\mathcal{T}_{n-1,1}$ является полиномом наилучшего интегрального приближения для $\mathcal{X}^2_{\eta_1}$.

Вычислим величину наилучшего приближения. С учетом указанного свойства ортогональности получаем

$$\begin{aligned}
E_{n-1}(\mathcal{X}^2_{\eta_1})_L &= 2\int_0^\pi |\mathcal{X}^2_{\eta_1}(t) - \gamma\mathcal{T}_{n-1,1}(t)|dt = \\
&= 2\int_0^\pi \left\{\mathcal{X}^2_{\eta_1}(t) - \gamma\mathcal{T}_{n-1,1}(t)\right\} \operatorname{sign}\sin nt\,dt = \\
&= 2\int_0^\pi \left\{\mathcal{X}^2_{\eta_1}(t)\right\} \operatorname{sign}\sin nt\,dt = 1.
\end{aligned}$$

Теорема 2.2.1 доказана.

Замечание 2.2.3. Следующая формула доказана в [17]

$$\|\mathcal{T}_{n-1,1}\|_L = 4\int_0^{\eta_1} \mathcal{T}_{n-1,1}(t)\,dt.$$

Эту формулу можно получить также другим способом, используя теорему 2.2.1 и рассуждения аналогичные тем, которые использовались пункте 2.1.3.

2.2.3. *Приближение функции* $\mathcal{X}_h^2$ *при* $h = \frac{2\ell-1}{n}\pi$, $2 \leqslant \ell \leqslant \frac{n+1}{2}$ *пространством* T_{n-1} *в интегральной метрике.* Рассмотрим сначала задачу приближения в интегральной метрике функции $\mathcal{X}_\pi^2$ (случай $h=\pi$) пространством T_{n-1}. При $n=1$ эта задача была решена в начале пункта 2.2.2 (см. предложение 2.2.1). Поэтому осталось рассмотреть случай $n \geqslant 2$.

Предложение 2.2.2. *Пусть* $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geqslant 2$, $n = 2\ell-1$. *Тогда справедливы равенства*

$$E_{n-2}(\mathcal{X}_\pi^2)_L = E_{n-1}(\mathcal{X}_\pi^2)_L = E_{n-2}(\mathcal{X}_{\pi/2}^1)_L = E_{n-1}(\mathcal{X}_{\pi/2}^1)_L = \frac{1}{2\ell-1}\,.$$

Доказательство. Заметим, что величины $E_k(f)_L$, $E_k(g)_L$ наилучшего интегрального приближения пространством T_k, $k \geqslant 0$ функций

$$f(t) = \mathcal{X}_\pi^2(t), \quad g(t) = \mathcal{X}_\pi^2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2\pi} = \mathcal{X}_{\pi/2}^1(t)$$

совпадают: $E_k(f)_L = E_k(g)_L$. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться теоремой 2.1.2 с учетом равенств $\xi_\ell = \frac{2\ell-1}{2n}\pi = \frac{\pi}{2}$.

Ниже нам понадобится следующий тригонометрический полином $\tau^*_{n-2,\,\ell}$ степени $n-2$, который является усредненной разностью двух сдвижек косинус-полинома $\tau_{n-2,\,\ell}$, заданного с помощью определения 2.1.2.

Определение 2.2.2. Для натуральных чисел n, ℓ, связанных между собой неравенствами $2 \leqslant \ell \leqslant \frac{n+1}{2}$, обозначим через $\tau^*_{n-2,\,\ell}$ следующий тригонометрический полином степени $n-2$:

$$\tau^*_{n-2,\,\ell}(t) = \frac{1}{2}\left\{\tau_{n-2,\,\ell}\,(t-\xi_\ell) - \tau_{n-2,\,\ell}\,(t+\xi_\ell)\right\}, \quad \text{где} \quad \xi_\ell = \frac{2\ell-1}{2n}\pi.$$

Нетрудно показать, что полином $\tau^*_{n-2,\,\ell}$ является нечетной функцией, т.е. — синус-полиномом, который интерполирует функцию $\mathcal{X}^2_{2\xi_\ell}$ в следующих точках из интервала $(-\pi,\pi)$:

$$\tau^*_{n-2,\,\ell}\left(\pm\frac{j\pi}{n}\right) = \mathcal{X}^2_{2\xi_\ell}\left(\pm\frac{j\pi}{n}\right), \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1, \quad j \neq 2\ell-1. \tag{2.2.13}$$

Теорема 2.2.2. *Пусть*

$$n, \ell \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant \ell \leqslant \frac{n+1}{2}, \quad \frac{h}{2} = \xi_\ell = \frac{2\ell-1}{2n}\pi. \tag{2.2.14}$$

Тогда справедливы равенства

$$\|\mathcal{X}_h^2 - \tau^*_{n-2,\,\ell}\|_L = E_{n-2}(\mathcal{X}_h^2)_L = E_{n-1}(\mathcal{X}_h^2)_L = \frac{1}{2\ell - 1}\,. \tag{2.2.15}$$

Доказательство. Отметим, что случай $2 \leqslant \ell = (n+1)/2$ рассмотрен в предложении 2.2.2.

Утверждение теоремы в оставшихся случаях можно доказать по схеме доказательства теоремы 2.1.2. Для этого достаточно воспользоваться свойством (2.2.13) полинома $\tau^*_{n-2,\,\ell}$ и тем фактом, что его степень равна $n-2$.

Однако имеется и другой способ доказательтства. Покажем, что утверждение теоремы является следствием представления (1.1.4), теорем 1.3.2, 2.1.2 и известного свойства величины наилучшего приближения:

$$E_k(\lambda\{f(\cdot - \theta) - g(\cdot + \vartheta)\})_L \leqslant |\lambda|\{E_k(f)_L + E_k(g)_L\},$$
$$k \in \mathbb{Z}_+, \quad \lambda, \theta, \vartheta \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L, \tag{2.2.16}$$

вытекающего из неравенства треугольника для нормы, положительной однородности нормы и инвариантности пространства T_k и нормы относительно любого сдвига.

Действительно, в силу представления (1.1.4) и свойства (2.2.16) при любом $k \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$E_k(\mathcal{X}_h^2)_L = E_k\left(\frac{1}{2}\left\{\mathcal{X}^1_{h/2}\left(\cdot - \frac{h}{2}\right) - \mathcal{X}^1_{h/2}\left(\cdot + \frac{h}{2}\right)\right\}\right)_L \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left\{E_k\left(\mathcal{X}^1_{h/2}\left(\cdot - \frac{h}{2}\right)\right)_L + E_k\left(\mathcal{X}^1_{h/2}\left(\cdot + \frac{h}{2}\right)\right)_L\right\} = E_k\left(\mathcal{X}^1_{h/2}\right)_L.$$

Отсюда с помощью теорем 1.3.2, 2.1.2 и последней группы равенств в (2.2.14) получаем

$$\frac{1}{2\ell - 1} = E_{n-1}(\mathcal{X}_h^2)_L \leqslant E_{n-2}(\mathcal{X}_h^2)_L \leqslant E_{n-2}\left(\mathcal{X}^1_{h/2}\right)_L = \frac{1}{2\ell-1}.$$

Из этих соотношений следует утверждение (2.2.15). Теорема 2.2.2 доказана.

Следствие 2.2.1. *Пусть* $n, \ell \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant \ell \leqslant \frac{n+2}{2}, \quad h = \frac{2\ell-1}{n+1}\pi$. *Тогда справедливо равенство* $E_{n-1}(\mathcal{X}_h^2)_L = \frac{1}{2\ell-1}$.

С помощью теоремы 2.2.2 (случай $\ell = 2$) и рассуждений аналогичных тем, которые использовались в пункте 2.1.5 нетрудно получить следующее утверждение.

Следствие 2.2.2. *При* $n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 3, \quad \beta = \frac{\pi}{n}$ *имеет место равенство*

$$\|\tau^*_{n-2,2}\|_L = 4\left\{\int_0^\beta \tau^*_{n-2,2}(t)\,dt + \int_{2\beta}^{3\beta} \tau^*_{n-2,2}(t)\,dt\right\}.$$

Библиографический список

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. –М. : Наука, 1965.

2. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. –М.: Физматгиз, 1961.

3. *Бернштейн С.Н.* Собрание сочинений. Т. 2. Конструктивная теория функций. –М.: АН СССР, 1954.

4. *Горбачев Д.В.* Усиление нижней оценки Тайкова в неравенстве между C- и L-нормами для тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 2003. Т. 74, №1. С. 132- 134.

5. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. –М.: Наука, 1977.

6. *Дзядык В.К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определямых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Матем. заметки. 1974. Т. 16, вып. 5. С. 691–701.

7. *Коркин А.Н.* Сочинения. Т. 1. –С.-П.: Физ.-мат. факультет Императорского С.-Петербургского ун-та, 1911.

8. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения. –М. : Наука, 1976.

9. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. –М. : Наука, 1987.

10. *Марков А.А.* О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием // Записки Академии наук. 1898. VIII серия, Т. VI.

11. *Нгуен Тхи Т.Х.* Оператор $D(D^2+1^2)\dots(D^2+n^2)$ и тригонометрическая интерполяция // Analysis Mathematica. 1989. Т. 15, С. 291–306.

12. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометричесими полиномаи в среднем // Известия АН СССР. Серия матем. 1946. Т. 10, с. 207–256.

13. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977.

14. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. –М. : Физматгиз, 1962.

15. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. –М. : Мир, 1974.

16. *Тайков Л.В.* Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // Успехи матем. наук. 1965. Т. 20, Вып. 3(123), С. 205–211.

17. *Тайков Л.В.* О наилучшем приближении ядер Дирихле // Матем. заметки. 1993. Т. 53, Вып. 6. С. 116–121.

18. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. –М.: Физматгиз, 1960.

19. *Чебышев П.Л.* Избранные труды. –М.: Изд-во АН СССР, 1955.

20. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении: В 2-х т. Т. 1. –М.: Мир. 1985.

21. *Babenko V., Kofanov V., Pichugov S.* Comparison of Rearrangement and Kolmogorov–Nagy Type Inequalities for Periodic Functions // Approx. Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov (B. Bojanov, Ed.), DARBA, Sofia. 2002. P. 24–53.

22. *Bohr H.* Ein allgemeiner Satz über die Integration eines trigonometrischen Polynoms // Prace Matem.-Fiz. (1935). V. 43. P. 273–288 (=Collected Mathematical Works II, C 36).

23. *Bohr H.* Un théorème général sur l'intégration d'un polynome trigonométrique // Comptes rendus Acad. Sci. (Paris), (1935),V. 200 P. 1276-1277.

24. *DeVore R.A., Lorentz G.G.* Constructive Approximation Berlin,... : Springer-Verlag, 1993.

25. *Favard J.* Sur l'pproximation des functions périodiques par des polynomes trigonométriques // Comptes rendus Acad. Sci. (Paris), (1936), V. 203. P. 1122-1124.

26. *Favard J.* Application de la formule summatoire d'Euler à la démostration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques et presque–périodiques // Matematisk Tidskrift København B. H. 4, 1936. P. 81-94.

27. *Favard J.* Sur les meilleurs procedes d'approximation de certaies clasess de fonctions par des polynomes trigonometriques // Bul. Sci. Math. (1937), V. 61. P. 209–224; 243–256.

28. *Gorbachev D. V.* Integral problem of Konyagin and (C, L)-constants of Nikolskii // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 2005. Iss. 2. P. S117–S138.

29. *Jackson D.* A general class of problems in approximation // Amer. Journ. of Math. (1924), V. 46. P. 215–234.

30. *Jackson D.* Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. (1933), V. 39. P. 889–906.

31. *Pinkus A.* On n-widths of periodic functions // Journal D'Analyse Mathématique, (1979), V. 35. P. 209–235.

32. *Kripke B.R., Rivlin T.J.* Approximation in the metric of $L_1(X, \mu)$ // Trans. Amer. Math. Soc. (1965), V. 119, № 1, Iss. 7. P. 101–122.

33. *Rogosinski W.* Uber die Abschnitte trigonometrischer Reihen // Mathematische Annalen. (1925), V. 95. P. 110–134.

34. *Rogosinski W.* Reihensummierung durch Abschnitts-Koppelungen // Mathematische Zeitschrift. (1926), V. 25. P. 132–149.

35. *Rogosinski W.* Abschnittverhalten bie trigonometrischen und insbesondere Fourierschen Reihen // Mathematische Zeitschrift. (1936), V. 41. P. 75–136.

Поступило 28.11.2006