UNIWERSYTET WROCŁAWSKI
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
Specjalizacja: Matematyka Teoretyczna

Moduł ciągłości i operatory typu Favarda

Piotr Staszak

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
dra hab. J. Kryakina

Wrocław 2012

Pracę dedykuję Rodzicom.

Spis treści

Podziękowania

Składam podziękowania Panu Doktorowi Habilitowanemu J. Kryakinowi za wiele życzliwych uwag i rad, a przede wszystkim za cierpliwość i wsparcie okazane mi w trakcie studiów.

1 Wprowadzenie

Historia modułu ciągłości zaczeła się około 100 lat temu, kiedy Vallee-Poussin pokazał, że funkcję $|x|$ na odcinku $[0,1]$ można przybliżać wielomianami algebraicznymi stopnia n z dokładnością rzędu $1/n$. Postawił on też pytanie, czy to jest rząd najlepszej możliwej aproksymacji, które spowodowało powstanie dwóch najważniejszych twierdzeń w teorii aproksymacji: twierdzenia Jacksona i twierdzenia Bernsteina.

Pierwsze z nich stanowi, że funkcję ciągłą można tym lepiej przybliżać wielomianami trygonometrycznymi, im jest bardziej regularna. Aby sformalizować regularność funkcji Jackson wykorzystał klasyczny moduł ciągłości pierwszego rzędu ω_1

$$\omega_1(f,h) = \sup_{0<t\leqslant h} \sup_x \left| f\left(x+\frac{t}{2}\right) - f\left(x-\frac{t}{2}\right)\right|.$$

Twierdzenie Jackson'a. *Dla każdej funkcji ciągłej o okresie 2π istnieje wielomian trygonometryczny T_n stopnia co najwyżej n taki, że*

$$\|f - T_n\| \leqslant C\omega_1\left(f, \frac{\pi}{n}\right),$$

gdzie C jest pewną stałą.

Twierdzenie to zostało uogólnione przez Stechkin'a, który wykorzystał moduł ciągłości rzędu k

$$\omega_k(f,h) = \sup_{0<t\leqslant h} \sup_x \left| \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f\left(x + \frac{kt}{2} - jt\right)\right|$$

w następujący sposób:

Twierdzenie Stechkin'a. *Dla każdej funkcji ciągłej o okresie 2π istnieje wielomian trygonometryczny T_n stopnia co najwyżej n taki, że*

$$\|f - T_n\| \leqslant C_k\omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right),$$

gdzie C_k jest pewną stałą.

Wyniki te świadczą o istotności modułu ciągłości w teorii aproksymacji.

W pierwszej części niniejszej pracy magisterskiej przedstawiłem podstawowe własności klasycznego modułu ciągłości różnych rzędów. Przeanalizowałem jakie warunki musi spełniać funkcja, aby być modułem ciągłości oraz udowodniłem dwa bardzo ważne twierdzenia w teorii aproksymacji: twierdzenie Favarda i twierdzenie Jacksona-Stechkin'a dla modułu ciągłości drugiego rzędu.

Drugim zagadnieniem poruszanym w pracy magisterskiej są operatory typu Favarda $F_{n,k}$. Są to operatory, które dla danej funkcji zwracają dobrze przybliżającą ją bardziej regularną funkcję

$$\|g - F_{n,k}(g)\| \leqslant C_F n^{-2k} \|g^{(2k)}\|, \quad g \in C^{2k}(\mathbb{T}).$$

Operatory typu Favarda mogą zostać wykorzystane do pokazania niektórych nierówności związanych z modułami ciągłości.

2 Klasyczny moduł ciągłości

2.1 Moduł ciągłości rzędu pierwszego

Klasycznym modułem ciągłości funkcji f rzędu pierwszego nazywamy wartość

$$\omega_1(f,h) = \sup_{0<t\leqslant h} \sup_x \left| f\left(x+\frac{t}{2}\right) - f\left(x-\frac{t}{2}\right) \right|.$$

Funkcja ω_1 jest niemalejąca po h i $\omega_1(f,0)=0$. Aby moduł ciągłości był ciągły w punkcie $h=0$ potrzeba i wystarcza, aby funkcja f była jednostajnie ciągła. Dlatego będziemy zakładać, że f jest funkcją jednostajnie ciągłą, wtedy też $\omega_1(f,h)=\omega_1(h)$ jest skończone dla każdego h.

Lebesgue i Nikolski znaleźli konieczne i wystarczające warunki, aby funkcja była modułem ciągłości pierwszego rzędu.

Lemat 2.1. *Moduł ciągłości pierwszego rzędu posiada następujące własności:*

(1) ω_1 jest nieujemna i niemalejąca na $\mathbb{R}_+$ oraz $\omega_1(h)\to\omega_1(0)=0$, dla $h\to 0$,

(2) ω_1 jest ciągła na $\mathbb{R}_+$,

(3) ω_1 jest podaddytywna $\omega_1(h_1+h_2)\leqslant\omega_1(h_1)+\omega_1(h_2)$.

Dowód. Własność (1) wynika wprost z definicji. Własność (3) wynika z faktu, że jeśli $|x-y|\leqslant h_1+h_2$, to istnieje $z\in\mathbb{R}$ taki, że $|x-z|\leqslant h_1$ i $|z-y|\leqslant h_2$ oraz $|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|\leqslant\omega_1(h_1)+\omega_1(h_2)$. Stąd i z ciągłości w $h=0$ otrzymujemy

$$|\omega_1(t+h)-\omega_1(t)|\leqslant\omega_1(h)\to 0,$$

gdy $h\to 0$, co dowodzi własności (2). □

W drugą stronę, jeśli funkcja ω_1 spełnia warunki z powyższego lematu, to jest modułem ciągłości pierwszego rzędu funkcji $f(x)=\omega_1(|x|)$.

Łatwo można też znaleźć związek modułu ciągłości z funkcją Lipschitza. Funkcję f nazywamy Lipschitza α, jeśli istnieje C_1 taka, że dla każdych x, y

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C_1|x-y|^\alpha.$$

Dla $\alpha>1$ jedynymi funkcjami spełniającymi powyższą nierówność są funkcje stałe, co wynika z twierdzenia Lagrange'a. Okazuje się, że f jest Lipschitz α wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega_1(f,t)\leqslant C_2t^\alpha$ dla $t\geqslant 0$ i pewnej stałej $C_2>0$.

Zauważmy także, że jeśli funkcja spełnia dwa pierwsze warunki z lematu 2.1 oraz $\omega(h)/h$ maleje to w jest podaddytywna i w konsekwencji jest modułem ciągłości.

Lemat 2.2. *Niech ω będzie ciągłą, niemalejącą funkcją na $\mathbb{R}_+$, spełniającą $\omega(0)=0$. Jeśli $\omega(h)/h$ jest nierosnące, to ω jest modułem ciągłości.*

Dowód. Wystarczy pokazać własność (3) z lematu 2.1. Z założenia:

$$\frac{\omega(h_1+h_2)}{h_1+h_2} \leqslant \frac{\omega(h_1)}{h_1} \quad \text{i} \quad \frac{\omega(h_1+h_2)}{h_1+h_2} \leqslant \frac{\omega(h_2)}{h_2}.$$

Mnożąc te nierówności odpowiednio przez h_1 i h_2 oraz dodając stronami otrzymujemy

$$\omega(h_1+h_2) \leqslant \omega(h_1) + \omega(h_2).$$

□

Wniosek 2.3. *Ciągła, niemalejąca, wklęsła funkcją ω na $\mathbb{R}_+$, spełniającą $\omega(0) = 0$ jest modułem ciągłości.*

Dowód. Funkcja f wklęsła ($\alpha f(x) + \beta f(y) \leqslant f(\alpha x + \beta y)$ dla $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$), która spełnia $f(0) = 0$ ma własność, że $f(x)/x$ maleje. Dokładnie, jeśli $x \leqslant y$, to korzystając z wklęsłości otrzymujemy

$$\frac{x}{y} f(y) = \frac{y-x}{y} f(0) + \frac{x}{y} f(y) \leqslant f(x).$$

□

Jeśli moduł ciągłości ω nie jest funkcją wklęsłą, to jego otoczka wklęsła $\widetilde{\omega}$, czyli najmniejsza funkcja wklęsła większa od funkcji ω też jest modułem ciągłości.

Aby to udowodnić zauważmy, że jeśli L jest zbiorem funkcji liniowych l takich, że $l(t) \geqslant \omega(t)$ dla $t \in \mathbb{R}_+$ (zakładamy, że taka l istnieje), to

$$\phi(t) = \inf_{l \in L} l(t) \tag{1}$$

jest wklęsłą funkcją taką, że $\phi(t) \geqslant \omega(t)$. Ponadto, jeśli $\psi(t) \geqslant \omega(t)$ i ψ jest wklęsła, to $\psi(t) \geqslant \phi(t)$ dla $t \geqslant 0$. Aby to pokazać skorzystamy z faktu, że w każdym punkcie $t_0 > 0$, istnieją skończone lewa i prawa pochodna $\psi'_-(t_0)$, $\psi'_+(t_0)$ oraz z wklęsłości $\psi'_+(t_0) \leqslant \psi'_-(t_0)$. Niech l będzie prostą o współczynniku kierunkowym leżącym między tymi dwiema liczbami oraz interpolującą ψ w t_0, czyli $l(t_0) = \psi(t_0)$. Wtedy $\phi(t_0) \leqslant \psi(t_0)$. Ta nierówność pokazuje, że funkcja (1) jest otoczką wklęsłą funkcji ω. Jeśli ω jest ograniczoną funkcją, dla której $\omega(0) = 0$, to otoczka wklęsła też ma takie właściwości.

Lemat 2.4. *Jeśli ω jest modułem ciągłości to jej otoczka wklęsła $\widetilde{\omega}$ też jest modułem ciągłości, oraz spełnia*

$$\widetilde{\omega}(t) \leqslant 2\omega(t). \tag{2}$$

Dowód. Niech $t_0 > 0$. Zdefiniujmy

$$l(t) = 2\omega(t_0) + \frac{\omega(t_0)}{t_0}(t - t_0).$$

Wtedy mamy $\omega(t) \leqslant \omega(t_0) \leqslant l(t)$ dla $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Natomiast dla $t \geqslant t_0$ otrzymujemy

$$\omega(t) = \omega\left(\frac{t}{t_0} \cdot t_0\right) \leqslant \left(\frac{t}{t_0} + 1\right) \omega(t_0) = l(t).$$

Powyższa nierówność wynika z lematu 2.7. W konsekwencji dla otoczki wypukłej dostajemy $\widetilde{\omega}(t_0) \leqslant l(t_0) = 2\omega(t_0)$. Ponieważ t_0 jest dowolne, nierówność (2) jest spełniona dla $t > 0$, a z ciągłości także dla $t = 0$. □

2.2 Moduł ciągłości rzędu drugiego

Klasycznym modułem ciągłości funkcji f rzędu drugiego nazywamy wartość

$$\omega_2(f,h) = \sup_{0<t\leqslant h} \sup_x |f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)|.$$

Moduł ciągłości ω_2 nie jest funkcją podaddytywną, spełnia natomiast dwa pierwsze warunki z lematu 2.1 oraz warunek

$$\omega_2(nh) \leqslant n^2\omega_2(h)$$

dla dowolnego $h \geqslant 0$ i $n \in \mathbb{N}$, co zostało udowodnione w ogólniejszej formie w lemacie 2.7.

Łatwo pokazać, że powyższy warunek wynika z warunku, że funkcja $\omega_2(h)/h^2$ jest nierosnąca.

Lemat 2.5. *Jeśli funkcja $\omega_2(h)/h^2$ jest nierosnąca na $(0,+\infty)$, to $\omega_2(nh) \leqslant n^2\omega_2(h)$ dla dowolnego $h \geqslant 0$ i $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, z założenia mamy

$$\frac{\omega_2(nh)}{(nh)^2} \leqslant \frac{\omega_2(h)}{h^2}.$$

Mnożąc obustronnie przez $(nh)^2$ otrzymujemy teze. □

Jednak konieczne warunki na funkcję, aby była modułem ciągłości drugiego rzędu nie są znane. Geit [6] i Shevchuk [11] próbowali znaleźć takie warunki. Geit pokazał, że jeśli w_2 spełnia dwa pierwsze warunki lematu 2.1 oraz $\omega_2(h)/h^2$ jest nierosnąca, to istnieje funkcja 2π okresowa, której moduł ciągłości ω_2' na odcinku $[0,\pi]$ spełnia nierówności

$$c_1\omega_2(x) \leqslant \omega_2'(x) \leqslant c_2\omega_2(x)$$

dla stałych $c_1 > 0$ i $c_2 > 0$.

Ważnym zastosowaniem drugiego modułu ciągłości jest nierówność Jacksona. Do jej dowodu wykorzystamy funkcję charakterystyczną

$$\aleph_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{for} \quad |x| < \frac{h}{2} \\ 0 & \text{for} \quad |x| \geqslant \frac{h}{2} \end{cases},$$

jej splot $\Lambda_h(x) = (\aleph_h * \aleph_h)(x)$ oraz twierdzenie Favarda.

Aby udowodnić twierdzenie Favarda, pokażemy następujący lemat.

Lemat 2.6. *Jeśli $f \in L_1$ jest $\frac{2\pi}{n}$-okresowa, to*

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt dt = \int_0^{2\pi} f(t)\sin kt dt = 0 \qquad k = 1,2,\dots,n-1.$$

Dowód. Podstawiając $t = u + 2\pi/n$ dostajemy

$$\int_0^{2\pi} \exp(ikt)f(t)\mathrm{d}t = \exp(2i\pi k/n)\int_0^{2\pi} \exp(iku)f(u)\mathrm{d}u,$$

czyli

$$(1-\exp(2i\pi k/n))\int_0^{2\pi}\exp(ikt)f(t)\mathrm{d}t=0.$$

Dla $k=1,2,\dots,n-1$ mamy $1-\exp(2i\pi k/n)=1-\cos(2i\pi k/n)-i\sin(2i\pi k/n)\neq 0$, zatem

$$\int_0^{2\pi}\exp(ikt)f(t)\mathrm{d}t=0,$$

co jest równoważne tezie. □

Twierdzenie Favarda Jeśli f jest 2π-okresowa i $f\in C^r$, to

$$\|f\|\leqslant\frac{K_r}{n^r}\|f^{(r)}\|,$$

gdzie $K_r=\frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j(r+1)}}{(2j+1)^{r+1}}\leqslant\frac{\pi}{2}$ nazywamy stałymi Favarda oraz $K_0=1$, $K_1=\frac{\pi}{2}$, $K_2=\frac{\pi^2}{8}$.

Dowód. Niech $S_n(f,x)$ oznacza n-tą sumę częściową szeregu Fouriera funkcji f.

$$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)\cos kt\cos kx+f(t)\sin kt\sin kx\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}f(t)\cos k(x-t)\mathrm{d}t=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}f(x-t)\cos kt\mathrm{d}t$$

Załóżmy, że $r=2m+1$, wtedy całkując r razy przez części otrzymujemy

$$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\frac{(-1)^m}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}f^{(r)}(x-t)\frac{\sin kt}{k^r}\mathrm{d}t.$$

Podobnie możemy policzyć dla r parzystego, w konsekwencji

$$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}(f^{(r)}*B_{r,n})(x),$$

gdzie

$$B_{r,n}(t)=\begin{cases}(-1)^m\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kt}{k^r} & \text{dla}\quad r=2m+1\\ (-1)^m\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kt}{k^r} & \text{dla}\quad r=2m\end{cases}$$

Skąd dla $n\to\infty$ dostajemy

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}(f^{(r)}*B_r)(x),$$

gdzie

$$B_r(t)=\begin{cases}(-1)^m\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^r} & \text{dla}\quad r=2m+1\\ (-1)^m\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{k^r} & \text{dla}\quad r=2m\end{cases}$$

Zatem

$$E_{n-1}(f)_C\leqslant\frac{1}{\pi}E_{n-1}(B_r)_{L_1}\|f^{(r)}\|_C$$

Pozostaje pokazać, że $E_{n-1}(B_r)_{L_1}\leqslant\pi K_r n^{-r}$.

Niech r będzie parzyste, a $\tau_{n-1,r}$ będzie parzystym wielomianem trygonometrycznym $n-1$ stopnia interpolującym parzystą funkcję B_r w punktach

$$t_j = \frac{2j-1}{2n}\pi, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Te punkty są zerami funkcji $\cos nx$ i pokażemy, że to są jedyne zera funkcji $\sigma = B_r - \tau_{n-1,r}$ i w nich σ zmienia znak. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy parzysta funkcja σ ma miejsce zerowe różne od t_j $(j = 1, \ldots, 2n)$ lub co najmniej jedno z t_j jest wielokrotnym miejscem zerowym. Wtedy twierdzenie Rolla implikuje, że σ' ma co najmniej n miejsc zerowych na $(0, \pi)$. Ponieważ σ' jest nieparzysta, więc $\sigma'(0) = \sigma'(\pi) = 0$, czyli σ' ma $n+2$ miejsca zerowe na $[0, \pi]$. Stosując twierdzenia Rolla drugi raz dostajemy, że parzysta funkcja σ'' ma co najmniej $n+1$ pierwiastków na tym przedziale. Powtarzając to rozumowanie otrzymujemy, że nieparzysta funkcja $\sigma^{(r-1)}$ ma co najmniej n pierwiastków na $(0, \pi)$ Ponieważ

$$\sigma^{(r-1)}(t) = B_1(t) - \tau^{(r-1)}_{n-1,r}(t) = \frac{\pi - t}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \sin kt \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

widzimy, że $\sigma^{(r-1)}(\pi) = 0$ zatem $\sigma^{(r-1)}$ ma co najmniej $2n+1$ pierwiastków na $(0, 2\pi)$, ale parzysty wielomian trygonometryczny

$$\sigma^{(r)}(t) = -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} k\beta_k \cos kt$$

jest $n-1$-szego stopnia i nie może mieć co najmniej $2n$ pierwiastków na $(0, 2\pi)$. Podsumowując pokazaliśmy, że

$$\mathrm{sgn}\sigma(t) = \pm \mathrm{sgn}\cos(nt).$$

Dla r nieparzystego bierzemy $\tau_{n-1,r}$ jako wielomian trygonometryczny interpolujący B_r w punktach $j\pi/n$ dla $j = 0, 1, \ldots, n-1$ i podobnie możemy pokazać, że

$$\mathrm{sgn}\sigma(t) = \mathrm{sgn}(B_r(t) - \tau_{n-1,r}(t)) = \pm \mathrm{sgn}\sin(nt).$$

Dla dowolnego r funkcja $\mathrm{sgn}\sigma(t)$ jest $2\pi/n$ okresowa, więc z powyższego lematu oraz z faktu, że $\int_o^{2\pi} \mathrm{sgn}\sigma(t)\mathrm{d}t = 0$, mamy

$$\int_0^{2\pi} \tau(t)\mathrm{sgn}(B_r(t) - \tau_{n-1,r}(t))\mathrm{d}t = 0$$

gdzie τ jest dowolnym wielomianem trygonometrycznym $n-1$ stopnia.

Korzystając z tej równości, otrzymujemy

$$\|B_r - \tau_{n-1,r}\|_1 = \int_0^{2\pi} (B_r(t) - \tau_{n-1,r}(t)) \cdot \mathrm{sgn}(B_r(t) - \tau_{n-1,r}(t))\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} (B_r(t) - \tau(t)) \cdot \mathrm{sgn}(B_r(t) - \tau_{n-1,r}(t))\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} |B_r(t) - \tau(t)|\mathrm{d}t = \|B_r - \tau\|_1,$$

czyli

$$E_{n-1}(B_r)_{L_1} = \int_0^{2\pi} |B_r(t) - \tau_{n-1,r}(t)|\mathrm{d}t.$$

Dla $r = 2m$ mamy

$$E_{n-1}(B_r)_{L_1} = \pm \int_0^{2\pi} (B_r(t) - \tau_{n-1,r}(t)) \cdot \operatorname{sgn} \cos nt \mathrm{d}t = \left| \int_0^{2\pi} B_r(t) \operatorname{sgn} \cos nt \mathrm{d}t \right|.$$

Ponieważ

$$\operatorname{sgn} \cos nt = \frac{4}{\pi} \left(\cos nt - \frac{1}{3} \cos 3nt + \frac{1}{5} \cos 5nt - \dots \right),$$

$$B_{2m}(t) = (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^{2m}}$$

oraz korzystając z tożsamości

$$\int_0^{2\pi} f(t)g(t) = \frac{\pi}{2} a_0(f)a_0(g) + \pi \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g)]$$

gdzie $a_k(f)$, $b_k(f)$ oraz $a_k(g)$, $b_k(g)$ są współczynnikami Fouriera funkcji f i g odpowiednio, dostajemy

$$\int_0^{2\pi} B_r(t) \operatorname{sgn} \cos nt \mathrm{d}t = \pi (-1)^m \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[(2k+1)n]^{2m}(2k+1)}.$$

W konsekwencji

$$E_{n-1}(B_r)_{L_1} = \frac{4}{n^{2m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2m+1}} = \frac{\pi K_{2m}}{n^{2m}}.$$

Dla $r = 2m+1$ nieparzystego mamy

$$B_{2m+1}(t) = (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^{2m+1}},$$

$$\operatorname{sgn} \sin nt = \frac{4}{\pi} \left(\sin nt + \frac{1}{3} \sin 3nt + \frac{1}{5} \sin 5nt + \dots \right).$$

Zatem otrzymujemy

$$E_{n-1}(B_{2m+1})_{L_1} = \left| \int_0^{2\pi} B_{2m+1}(t) \operatorname{sgn} \sin nt dt \right| = \frac{4}{n^{2m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2m+2}} = \frac{\pi K_{2m+1}}{n^{2m+1}}.$$

□

Korzystając z twierdzenia Favarda możemy pokazać krótki dowód twierdzenia Jacksona.

Twierdzenie Jacksona *Jeśli f jest 2π-okresową funkcją na $\mathbb{R}$ to dla $h = \frac{\pi}{2n}$ otrzymujemy*

$$E_n(f) \leqslant \omega_2(f, h).$$

Dowód. Niech τ_n będzie wielomianem trygonometrycznym n-tego stopnia najlepiej aproksymującym $f * \Lambda_h$. Wtedy

$$\|f - \tau\| \leqslant \|f - f * \Lambda_h\| + \|f * \Lambda_h - \tau\|.$$

Pierwszy składnik można oszacować, ponieważ

$$f(x)-\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\Lambda_h(t)dt = f(x)-\int_0^h (f(x-t)+f(x+t))\Lambda_h(t)dt =$$

$$= -\int_0^h (f(x+t)-2f(x)+f(x-t))\Lambda_h(t)dt$$

oraz $\int_0^h \Lambda_h(t)dt = \frac{1}{2}$, zatem

$$\|f - f*\Lambda_h\| \leqslant \frac{1}{2}\omega_2(f,h).$$

Natomiast z twierdzenia Favarda otrzymujemy oszacowanie na drugi składnik

$$\|f*\Lambda_h - \tau_n\| \leqslant \frac{\pi^2}{8}\frac{1}{n^2}\|(f*\Lambda_h)''\|.$$

Ponieważ

$$(f*\Lambda_h)(x)'' = f*(\Lambda_h)'' = \frac{1}{h^2}(f(x-h)-2f(x)+f(x+h)),$$

stąd

$$\|f*\Lambda_h - \tau\| \leqslant \frac{\pi^2}{8}\frac{1}{n^2}\frac{1}{h^2}\omega_2(f,h).$$

W konsekwencji dla $h=\frac{\pi}{2n}$ otrzymujemy

$$\|f-\tau\| \leqslant \omega_2(f,\frac{\pi}{2n}).$$

□

2.3 Moduł ciągłości wyższych rzędów

Dla funkcji $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ i $r\in\mathbb{N}$ definiujemy

$$\Delta_\delta^1 f(x) = \Delta_\delta f(x) = f\left(x+\frac{\delta}{2}\right) - f\left(x-\frac{\delta}{2}\right),$$

oraz

$$\Delta_\delta^r f(x) = \Delta_\delta(\Delta_\delta^{r-1}f(x)) = \sum_{v=0}^{r}\binom{r}{v}(-1)^v f\left(x+\frac{r\delta}{2}-v\delta\right).$$

Zakładając, że $[x-r\delta/2, x+r\delta/2]\subseteq[a,b]$.

Klasycznym modułem ciągłości funkcji f rzędu r nazywamy wartość

$$\omega_r(f,h) = \sup_{0<\delta\leqslant h}\|\Delta_\delta^r f\|_\infty.$$

Funkcja ω_r ma podobne własności jak ω_1. Jest nieujemna, niemalejąca i ciągła na $\mathbb{R}_+$, natomiast nie jest podaddytywna.

Ponadto dla klasycznego modułu ciągłości mamy.

Lemat 2.7. *Moduł ciągłości posiada następujące własności:*

(1) $\omega_r(f,h)\leqslant 2\omega_{r-1}(f,h)\leqslant\ldots\leqslant 2^{r-1}\omega(f,h)\leqslant 2^r\|f\|_\infty$,

(2) $\omega_r(f, nh) \leqslant n^r \omega_r(f, h)$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,

(3) $\omega_r(f, \lambda h) \leqslant (\lambda+1)^r \omega_r(f, h)$ *dla* $\lambda > 0$.

Dowód. Własność (1) wynika z nierówności $\Delta_\delta^r f(x) = \Delta_\delta^{r-1} f(x+\delta/2) - \Delta_\delta^{r-1} f(x-\delta/2) \leqslant 2\omega_{r-1}(f, h)$. Aby dowieść własność (2) pokażemy przez indukcję względem r równość

$$\Delta_{n\delta}^r f(x) = \sum_{v_1=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \dots \sum_{v_r=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \Delta_\delta^r f(x + v_1\delta + \dots + v_r\delta).$$

Dla $r = 1$ równość jest spełniona

$$\Delta_{n\delta} f(x) = \sum_{v_1=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \Delta_\delta f(x + v_1\delta) = f\left(x + \frac{n\delta}{2}\right) - f\left(x - \frac{n\delta}{2}\right).$$

Podobnie

$$\Delta_{n\delta}^{r+1} f(x) = \sum_{v_1=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \dots \sum_{v_r=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \Delta_\delta^r f\left(x + v_1\delta + \dots + v_r\delta + \frac{n\delta}{2}\right) -$$

$$- \sum_{v_1=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \dots \sum_{v_r=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \Delta_\delta^r f\left(x + v_1\delta + \dots + v_r\delta - \frac{n\delta}{2}\right) =$$

$$= \sum_{v_1=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \dots \sum_{v_{r+1}=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \Delta_\delta^{r+1} f(x + v_1\delta + \dots + v_{r+1}\delta)$$

Pozostaje własność (3). Niech $\lambda \in (n, n+1]$, wtedy

$$\omega_r(f, \lambda h) \leqslant \omega_r(f, (n+1)h) \leqslant (n+1)^r \omega_r(f, h) \leqslant (\lambda+1)^r \omega_r(f, h).$$

$\square$

Podobnie jak dla ω_2, nie są znane konieczne warunki, aby funkcja była modułem ciągłości rzędu wyższego niż 2.

3 Inne moduły ciągłości

3.1 Ditzian-Totik moduł ciągłości

Z. Ditzian i V. Totik w pracy [5] przedstawili zmodyfikowany moduł ciągłości

$$\omega_{r,\varphi}(f, h) = \sup_{0<\delta\leqslant h} \|\Delta_{\delta\varphi}^r f\|_\infty$$

dla $x \in (a, b)$, gdzie $a = -\infty$ lub $a = 0$, $b = 1$ lub $b = \infty$.

Funkcja φ powinna spełniać następujące własności:

(1) $\varphi \sim 1$ lokalnie tzn. dla każdego podprzedziału $[c,d] \subset (a,b)$ istnieje stała $M > 0$ taka, że $M^{-1} \leqslant \varphi(x) \leqslant M$ dla $x \in [c,d]$,

(2) istnieją dwie liczby $u(a)$ i $u(b)$ ($a = -\infty$ lub $a = 0$, $b = 1$ lub $b = \infty$) spełniające $u(0) \geqslant 0$, $u(1) \geqslant 0$ oraz $u(\pm\infty) \leqslant 0$, dla których

$$\varphi(x) \sim \begin{cases} |x|^{u(a)} & \text{gdy } x \to a+ \quad (a = -\infty \text{ lub } a = 0) \\ x^{u(\infty)} & \text{gdy } x \to \infty \quad (b = \infty) \\ (1-x)^{u(1)} & \text{gdy } x \to 1- \quad (b = 1). \end{cases}$$

(3) $\varphi(x)$ jest mierzalna i istnieją stałe M_0 i h_0 takie, że dla każdego $0 < h \leqslant h_0$ i dla każdego skończonego przedziału $E \subset (a,b)$

$$\mu\{x : x \pm h\varphi(x) \in E,\ x \in (a,b)\} \leqslant M_0 \mu(E),$$

gdzie $\mu(A)$ oznacza miarę zbioru A.

Przykłady. Dla $\varphi(x) \equiv 1$ otrzymujemy klasyczny moduł ciągłości. Bardziej skomplikowanymi przkładami są $\varphi(x) = x$ dla $(a,b) = (0,\infty)$ lub $\varphi(x) = \sqrt{x}(1-x)$ dla $(a,b) = (0,1)$.

K-funkcjonałem nazywamy

$$K_{r,\varphi}(f,t) = \inf_g \{\|f-g\| + t^r \|\varphi^r g^{(r)}\| \ ; \ g^{(r-1)} \in A.C_{loc}\}$$

gdzie $g^{(r-1)} \in A.C_{loc}$ oznacza, że g jest $r-1$ razy różniczkowalna i $g^{(r-1)}$ jest bezwzględnie ciągła.

Powyższy moduł ciągłości i K-funkcjonał są w pewnym sensie równoważne. Obrazuje to poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.1. *Niech φ spełnia warunki 1-3. Wtedy*

$$M^{-1}\omega_{r,\varphi}(f,t) \leqslant K_{r,\varphi}(f,t) \leqslant M\omega_{r,\varphi}(f,t), \quad 0 < t \leqslant t_0.$$

dla pewnych stałych $M > 0$ i t_0.

Dowód tego twierdzenia jest jednym z głównych wyników pracy [5].

Ta równoważność jest istotna dla ustalenia właściwości tego modułu ciągłości oraz pokazania jego możliwych sposobów wykorzystania.

3.2 Boman-Shapiro moduł ciągłości

Niech σ oznacza ograniczoną miarę Borelowską. Piszemy $f * \sigma$, aby oznaczyć funkcję, której wartość w t wynosi $\int f(t-u)d\sigma(u)$. Ponadto dla $a > 0$, niech $\sigma_{(a)}(E) = \sigma(a^{-1}E)$ dla wszystkich zbiorów Borelowskich E.

Jan Boman i Harold S. Shapiro podali inny moduł ciągłości, który zdefiniowali w następujacy sposób

$$\omega_\sigma(f,a) = \sup_{0<b\leqslant a} D_\sigma(f,b),$$

gdzie

$$D_\sigma(f,b) = \|f * \sigma_b\|.$$

Dla miary

$$\sigma = \delta_{\frac{1}{2}} - \delta_{-\frac{1}{2}}, \qquad \text{gdzie } \delta_x(A) = \begin{cases} 0, & x \notin A, \\ 1, & x \in A \end{cases}, \quad A\text{- zbiór mierzalny,}$$

otrzymujemy klasyczny moduł ciągłości pierwszego rzędu.

Moduł ciągłości zdefiniowany w pracach [9], [1] także może być widziany jako szczególny przypadek Boman-Shapiro modułu ciągłości. Opiszemy go w kolejnym podrozdziale.

3.3 Kryakin-Babienko moduł ciągłości

Kryakin i Babienko [1] zdefiniowali nowy moduł ciągłości

$$W_{2k}(f, x, h) = (-1)^h \frac{1}{\binom{2k}{k}} \int_{\mathbb{R}} \Delta_t^{2k} f(x) \Lambda_h(t) \mathrm{d}t.$$

dla $h > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Udowodnione zostały także niektóre jego własności. Jego ograniczoność.

Twierdzenie 3.2. *Dla $h > 0$, $k \in \mathbb{N}$ i $f \in C(\mathbb{T})$ zachodzi*

$$W_{2k}(f, h) = \|W_{2k}(f, \cdot, h)\| \leqslant 3\|f\|.$$

Oraz nierówność analogiczna do nierówności Bernsteina-Stechkina.

Twierdzenie 3.3. *Dla $\tau \in T_n$, $k, n \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\|\tau^{(2k)}\| \leqslant \frac{n^{2k}}{W_{2k}(\cos nx, h)} W_{2k}(\tau, h), \quad h \in (0, 2\pi/n].$$

Korzystając z tych własnośći zostało udowodnione twierdzenie typu Jacksona-Stechkina używające modułu W_{2k}.

Twierdzenie 3.4. *Niech $f \in C(\mathbb{T})$, $k, n \in \mathbb{N}$ oraz $\alpha > 1$. Wtedy*

$$E_{n-1}(f) \leqslant \left(\sec \frac{\pi}{2\alpha}\right) W_{2k}\left(f, \frac{\alpha\pi}{n}\right).$$

4 Operatory typu Favarda

4.1 Definicja

Niech $F = \{F_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}\}$ będzie rodziną operatorów $F_{n,k} : C^{2k}(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ spełniającą

$$\|g - F_{n,k}(g)\| \leqslant C_F n^{-2k} \|g^{(2k)}\|, \quad g \in C^{2k}(\mathbb{T}) \tag{3}$$

gdzie stała $C_F > 0$ nie zależy od g, k, n. Operator $F_{n,k} \in F$ będziemy nazywali *operatorem typu Favarda.*

4.2 Przykłady

4.2.1 Średnie Favarda

W dowodzie twierdzenia Favarda pokazaliśmy, że dla 2π okresowej $g \in C^r$, $r \geqslant 1$ zachodzi

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}(g^{(r)} * B_r)(x).$$

Oznaczmy

$$G_{n,r}(g) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}(g^{(r)} * \tau^*),$$

gdzie τ^* jest wielomianem trygonometrycznym n-tego stopnia najlepiej aproksymującym B_r w L_1 (zob.). Wtedy z twierdzenia Favarda $G_{n,r}$ spełnia (3) ze stałą $\frac{\pi}{2}$, czyli jest operatorem typu Favarda.

4.2.2 Okresowe funkcje sklejane

Mówimy, że s jest funkcją sklejaną $s \in S_{2n,2k-1}$, jeśli $s^{(2k-1)}$ jest kawałkami stała, tzn.

$$s^{(2k-1)}(x) = s_j \in \mathbb{R} \qquad x \in [2\pi j/(2n), 2\pi(j+1)/(2n)), \quad j = 0, \ldots, 2n-1$$

oraz $s^{(2k-2)} \in \mathbb{C}(\mathbb{T})$. Zdefiniujmy operator interpolacji w punktach $\pi j/n$, $j = 0, \ldots, 2n-1$

$$I_{n,k}(g) \in S_{2n,2k-1}$$

Twierdzenie 4.1. *$I_{n,k}$ jest operatorem typu Favarda:*

$$\|g - I_{n,k}(g)\| \leqslant K_{2n} n^{-2k} \|D^{2k} g\|.$$

Dowód tego faktu można znaleźć w [8] (s. 223).

4.3 Właściwości

Korzystając z operatorów typu Favarda możemy udowodnić nierówność typu Jacksona dla modułu ciągłości Kryakina-Babienko.

Twierdzenie 4.2. *Dla $f \in C(\mathbb{T})$, operatora typu Favarda $F_{n,k}$ i wielomianu $\tau^* \in T_{n-1}$ najlepszej jednostajnej aproksymacji funkcji f, zachodzi*

$$\|f - F_{n,k}(\tau^*)\| \leqslant C_J W_{2k}(f, \frac{\alpha\pi}{n}), \quad \alpha \in (1, 2],$$

gdzie $C_J = \left(1 + C_F + 3C_F \left(\sec \frac{\pi}{2\alpha}\right)\right) \sec \frac{\pi}{2\alpha}$.

Dowód. Z twierdzenia (3.4) wiemy, że

$$1 = E_{n-1}(\cos nx) \leqslant \left(\sec \frac{\pi}{2\alpha}\right) W_{2k}\left(\cos nx, \frac{\alpha\pi}{n}\right),$$

czyli

$$\frac{1}{W_{2k}\left(\cos nx, \frac{\alpha\pi}{n}\right)} \leqslant \sec \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Korzystając z tej nierówności oraz twierdzeń (3.2) i (3.3) otrzymujemy

$$\|\tau^* - F_{n,k}(\tau^*)\| \leqslant C_F n^{-2k} \|D^{2k}\tau^*\| \leqslant C_F \left(\sec\frac{\pi}{2\alpha}\right) W_{2k}(\tau^*, \frac{\alpha\pi}{n}) \leqslant$$

$$\leqslant C_F \left(\sec\frac{\pi}{2\alpha}\right) (W_{2k}(f-\tau^*, \frac{\alpha\pi}{n}) + W_{2k}(f, \frac{\alpha\pi}{n})) \leqslant C_F \left(\sec\frac{\pi}{2\alpha}\right) (3\|f-\tau^*\| + W_{2k}(f, \frac{\alpha\pi}{n})).$$

Z twierdzenia (3.4) wiemy, że

$$\|f-\tau^*\| \leqslant \left(\sec\frac{\pi}{2\alpha}\right) W_{2k}\left(f, \frac{\alpha\pi}{n}\right)$$

Ponieważ

$$\|f - F_{n,k}(\tau^*)\| \leqslant \|f-\tau^*\| + \|\tau^* - F_{n,k}(\tau^*)\|,$$

dostajemy

$$\|f - F_{n,k}(\tau^*)\| \leqslant \left(\sec\frac{\pi}{2\alpha}\right) W_{2k}\left(f, \frac{\alpha\pi}{n}\right) + C_F \left(\sec\frac{\pi}{2\alpha}\right) \left(3\left(\sec\frac{\pi}{2\alpha}\right) + 1\right) W_{2k}\left(f, \frac{\alpha\pi}{n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + C_F + 3C_F \sec\frac{\pi}{2\alpha}\right) \left(\sec\frac{\pi}{2\alpha}\right) W_{2k}\left(f, \frac{\alpha\pi}{n}\right).$$

□

5 Podsumowanie

Pierwsza część pracy magisterskiej została poświęcona modułom ciągłości. Zaczeliśmy od klasycznego modułu ciągłości pierwszego rzędu. Pokazaliśmy jakie warunki musi spełnić funkcja, aby być takim modułem ciągłości. Warunki takie nie są znane dla modułów ciągłości wyższych rzędów. Udowodniliśmy dwa bardzo ważne twierdzenia w teorii aproksymacji, twierdzenie Favarda i twierdzenie Jacksona.

W drugiej części zaprezentowaliśmy inne moduły ciągłości. Wsponieliśmy o modułach Ditzian-Totik i Boman-Shapiro oraz wprowadziliśmy moduł ciągłości Kryakina-Babienko. Wymieniliśmy jego podstawowe właściwości, które zostały wykorzystane w trzeciej częśći pracy.

Ostatnia część została poświęcona operatorom typu Favarda. Opisaliśmy podstawowe przykłady takich operatorów, oraz udowodniliśmy niektóre ich właściwości. Pokazane zostało także jak takie operatory mogą uprościć dowody twierdzeń w teorii aproksymacji.

Literatura

[1] Babienko A. G., Kryakin Yu. V., Staszak P. T. *Functions measuring smoothness and the constant in the Jackson-Stechkin theorem*, 2011.

[2] Boman J. *Equivalence of generalized moduli of continuity*, Matematiska Institutionen Stockholms Universitet, 1978.

[3] Boman J., Shapiro H. S. *Comparison theorems for a generalized modulus of continuity*, 1980.

[4] DeVore R.A., Lorentz G.G. *Constructive approximation*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 303, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[5] Ditzian Z., Totik V. *Moduli of Smoothness*, 1987.

[6] Geit V. E. , *On the exactness of certain inequalities in approximation theory*, Mathematical Notes, 10:5, s. 768–776, 1971.

[7] Konyagin S.V., *On the second moduli of continuity*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 269, s. 143-145-145, 2010.

[8] Korneichuk, N.P. *Exact constants in approximation theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[9] Foucart S., Kryakin Yu., Shadrin A. *On the exact constant in Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric.* Constr. Approx. 29 (2009), no. 2, 157–179.

[10] Shapiro H. S. *Topics In Approximation Theory*, 1971.

[11] Shevchuk I. A. *Some Remarks on Functions of the Type of the Modulus of Continuity of Order* $k \geqslant 2$, Problems of Approximation Theory and Its Applications, s. 194-199, 1976

[12] Trigub R. M., Bellinsky E. S. *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, 2004.